فصل ۱

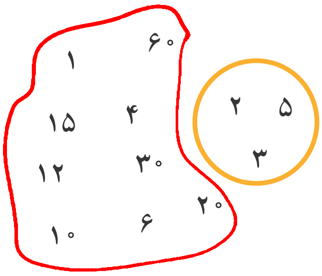
# مجموعه‌ها

وَ هُوَ الَّذی جَعَلَ لَکُم النُّجومَ لِتَهتَدوا بِها فی ظُلُماتِ البَرِّ وَالبَحرِ ......
او (خداوند) کسی است که ستارگان را برای شما قرار داد، تا در تاریکی‌های خشکی و دریا، به وسیلهٔ آنها راه یابید...
(سورهٔ انعام، آیهٔ ۹۷)

**منظومهٔ شمسی مجموعه‌ای است شامل ستارهٔ خورشید و سیّاره‌هایی که روی مدارهای خاصّی در حال چرخش هستند. البته ستاره‌هایی با بزرگی چندهزار برابر خورشید هم وجود دارند که اگر این ستاره‌ها به اندازهٔ خورشید به زمین نزدیک بودند، تمام آسمان ما را می‌پوشاندند.**

## درس اوّل: معرفی مجموعه

### فعالیت




در شکل روبه‌رو شمارنده‌های طبیعی عدد ۶۰ را نوشته‌ایم و بین آنها شمارنده‌های اوّل را مشخص کرده‌ایم. شما هم شمارنده‌های ۶۰ را که اوّل نیستند، در یک منحنی بسته قرار دهید.

اگر شمارنده‌های طبیعی و اوّلِ عدد ۶۰ یعنی ۲، ۳ و ۵ را در داخل دو آکلاد قرار دهیم و آن را با حروفی چون A یا B یا ... نام‌گذاری کنیم و بنویسیم $A = \{2,3,5\}$؛ در این‌صورت یک **مجموعه** تشکیل داده‌ایم و به هریک از عددهای ۲، ۳ و ۵ یک **عضو** مجموعهٔ A می‌گوییم؛ پس مجموعهٔ A دارای ۳ عضو است.

❋ شما شمارنده‌های مرکب عدد ۶۰ را به‌صورت یک مجموعه بنویسید و آن را B بنامید.

$B = \{4, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$

❋ مجموعهٔ شامل شمارنده‌های عدد ۶۰ که نه اوّل باشند، و نه مرکب، چند عضو دارد؟ یک عضو این مجموعه را نیز C بنامید و آن را نمایش دهید. $C = \{1\}$

❋ مجموعهٔ D شامل همهٔ شمارنده‌های دورقمی ۶۰ را تشکیل دهید؛ این مجموعه چند عضو دارد؟ ۶ عضو دارد $D = \{10, 12, 15, 20, 30, 60\}$

از رضا و احمد خواسته شد تا مجموعهٔ شامل ۳ شمارندهٔ زوج عدد ۶۰ را تشکیل دهند. **احمد** نوشت: $\{4,6,10\}$ و **رضا** نوشت: $\{6,10,12\}$ به نظر شما چرا جواب‌های آنها با هم فرق دارد؟

چون تعداد شمارنده های زوج عدد ۶۰ از ۳ تا بیشتر هستند

**نتیجه**: در ریاضیات عبارت‌هایی شبیه این عبارت، که مشخص کنندهٔ یک مجموعهٔ معین و یکتا نباشد، مجموعه‌ای را مشخص نمی‌کند.

> در نمایش مجموعه‌ها، ترتیب نوشتن عضوهای مجموعه، مهم نیست و با جابه‌جایی عضوهای یک مجموعه، مجموعهٔ جدیدی ساخته نمی‌شود؛ همچنین با تکرار عضوهای یک مجموعه، مجموعهٔ جدیدی ساخته نمی‌شود؛ بنابراین به‌جای $\{3,3,4\}$ می‌نویسیم $\{3,4\}$.

### معرفی مجموعه

ما، در زندگی روزمره در صحبت‌ها و نوشته‌هایمان از واژه‌هایی مانند دسته، گروه و مجموعه استفاده می‌کنیم؛ برای مثال وقتی می‌گوییم «گروهی از ورزشکاران وارد ورزشگاه شدند»، نام ورزشکاران را مشخص نکرده‌ایم، درحالی که ما از مجموعه در ریاضی **برای بیان و نمایش دسته‌ای از اشیای مشخص (عضویت این اشیا در مجموعه کاملاً معین باشد)** و **متمایز (غیرتکراری)** استفاده می‌کنیم.

## فعالیت

۱ــ کدام‌یک از عبارت‌های زیر مشخص‌کنندهٔ یک مجموعه است؟ مجموعهٔ مورد نظر را نمایش دهید.

الف) عددهای طبیعی و یک رقمی   ب) چهار شاعر ایرانی   ج) دو عدد اوّلِ کوچک‌تر از ۱۲

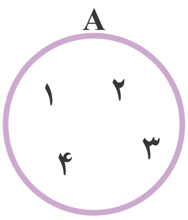
A = {۱,۲,۳,...,۹}

۲ــ با توجه به شرط متمایز بودن عضوهای یک مجموعه، جاهای خالی را پرکنید :

الف) به‌جای {۱,۲,۱,۴,۵} = A باید بنویسیم {۱ , ۲ , ۴ , ۵} = A

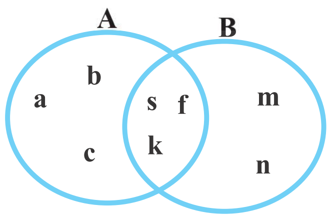
ب) به دلیل تکراری بودنِ عدد ۵ در {۵,۶,۵,۷} = B آن را به‌صورت B={۵,۶,۷} می‌نویسیم.

اگر مجموعهٔ A را به‌صورت {a,b,۵,۷} = A درنظر بگیریم، برای نشان دادن اینکه a عضوی از مجموعهٔ A است، می‌نویسیم $a \in A$ و می‌خوانیم «a عضوِ A است» و چون عدد ۴ عضو A نیست، می‌نویسیم $۴ \notin A$ و می‌خوانیم «۴ عضو A نیست».




**نمایش مجموعه‌ها با استفاده از نمودار وِن** : مجموعه را می‌توان با استفاده از منحنی‌ها یا خط‌های شکستهٔ بسته نمایش داد؛ به عنوان مثال، نمایش مجموعهٔ {۱,۲,۳,۴} = A با استفاده از نمودار وِن به‌صورت مقابل است.

## فعالیت

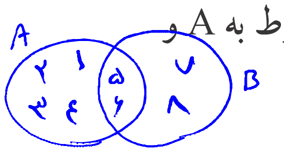



۱ــ با توجه به نمودار وِن، که برای دو مجموعهٔ A و B رسم شده است، مجموعه‌های A و B را با عضوهایشان مشخص کنید.

A={a,b,c,s,k,f}   B={m,n,k,s,f}

۲ــ دو مجموعهٔ {۱,۲,۳,۴,۵,۶} = A و {۵,۶,۷,۸} = B را درنظر بگیرید :

دو مجموعه را با یک نمودار وِن نمایش دهید. کدام عددها هم در منحنی بستهٔ مربوط به A و هم در منحنی بستهٔ B وجود دارد؟ ۵ و ۶




۳ــ مجموعهٔ عددهای دو رقمی و زوجِ اوّل را بنویسید و آن را E بنامید. این مجموعه چند عضو دارد؟ هیچ عضوی ندارد.   E={ }

تنها عدد اول زوج، عدد ۲ است که یک رقمی است. و سایر اعداد اول بجز ۲، فرد هستند.

«اگر در مجموعه‌ای عضوی وجود نداشته باشد، آن را مجموعهٔ **تُهی** می‌نامیم و با نماد $\varnothing$ یا $\{\}$ نمایش می‌دهیم.» توجه شود که این مجموعه با مجموعهٔ $\{\varnothing\}$ یا $\{0\}$ که هر کدام دارای یک عضو هستند، یکی نیست.

۴ــ کدام یک از عبارت‌های زیر، مجموعهٔ تهی را مشخص می‌کند؟

الف) عددهای طبیعی بین ۵ و ۶ ← { } ب) عددهای صحیح بین ۱- و ۱ ← A={۰}

ج) عددهای اول و زوج ← B={۲} د) عددهای طبیعی یک رقمی و مضرب ۳ که اوّل باشد. ← C={۳}

## کار در کلاس

اعداد حسابی کمتر از صفر ، گاوهایی که پرواز می‌کنند ، ماهی‌هایی که در خشکی زندگی می‌کنند

۱ــ سه عبارت بنویسید که هرکدام نشان دهندهٔ مجموعهٔ تهی باشد؛ سپس عبارت‌های خود را با نوشته‌های هم‌کلاسی‌های خود مقایسه کنید.

۲ــ سه عبارت بنویسید که هرکدام مشخص‌کنندهٔ مجموعه‌ای فقط با یک عضو باشد.

اعداد حسابی کمتر از یک ، اعداد اول و زوج ، متوازی‌الاضلاعی که چهار ضلع برابر و چهار زاویه برابر دارد

۳ــ عبارت هایی که مجموعه‌ای را مشخص می‌کند، با علامت ✓ و بقیه را با علامت × مشخص کنید (با ذکر دلیل).

الف) چهار عدد فرد متوالی ← اعضای آن مشخص نیست

ب) سه عدد طبیعی زوج متوالی با شروع از ۲ ← A={۲،۴،۶}

ج) عددهای اوّلِ کوچک‌تر از ۲۰ ← B={۲،۳،۵،...،۱۹}

د) سه شهر ایران

هـ) شمارنده‌های عدد ۲۴ ← C={۱،۲،۳،۴،۶،۸،۱۲،۲۴}

و) ۵ عدد بزرگ

ز) عددهای طبیعی بین ۲ و ۳ ← تهی ∅={ }

۴ــ مانند نمونه کامل کنید :

| | | |
|---|---|---|
| A | مجموعهٔ حروف الفبای فارسی | A = {الف، ب، پ، ...، ی} |
| G | {۳،۴،۵،۶،۷،۸،۹} | B = {۴،۸،۱۲،...} |
| E | مجموعهٔ عددهای صحیح بین ۲- و ۳- | C : مجموعهٔ حروف a و b و عدد ۳ |
| B | مجموعهٔ مضرب‌های طبیعی عدد ۴ | D = {۵} |
| H | مجموعهٔ عددهای اوّل یک رقمی | E = { } |
| D | مجموعهٔ مضرب‌های اوّل عدد ۵ | F = {۲،۴،۶،۸} |
| C | {۳,a,b} | G: مجموعهٔ عددهای طبیعی بین ۲ و ۱۰ |
| F | {۶،۴،۲،۸} | H = {۲،۳،۵،۷} |

۵ــ کدام‌یک از عبارت‌های زیر مشخص‌کنندهٔ یک مجموعه است؟ با نمودار وِن نشان دهید :

الف) عددهای صحیح مثبت و کمتر از ۱۰ ← A: ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹

ب) شمارنده‌های اوّلِ عدد ۱۹ ← B: ۱۹

ج) عددهایی که شش وجه یک تاس معمولی را مشخص می‌کند. ← C: ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶

د) جواب‌های معادلهٔ ۲x+۸=۱ ← $۲x=-۷$ ← $x=-\frac{۷}{۲}$ ← D: $-\frac{۷}{۲}$

هـ) چهار میوهٔ خوشمزه

و) عددهای صحیحِ منفی و بزرگ‌تر از ۸− ← E: ۷− ۶− ۱− ۲− ۵− ۳− ۴−

## تمرین

۱ــ متناظر با هر عبارت، یک مجموعه و متناظر با هر مجموعه، یک عبارت بنویسید و تعداد عضوهای هر مجموعه را تعیین کنید :

مکعب یعنی توان سوم

الف) A = {۱,۸,۲۷,۶۴,۱۲۵} ← مکعب اعداد طبیعی کوچکتر از ۶

ب) C = {۱۰} ← کوچکترین عدد طبیعی دو رقمی یا بزرگترین شمارنده ۱۰

ج) عددهای طبیعیِ مضرب ۵ و کوچک‌تر از ۱۰۰ ← B={۵,۱۰,۱۵,...,۹۵}

د) عددهای طبیعی بزرگ‌تر از ۴ و کوچک‌تر از ۵ ← ∅={ }

هـ) عددهای صحیح منفی که بین ۴ و ۷ قرار دارد. ← ∅={ }

و) عددهای اوّل دورقمی که مضرب ۷ باشد. ← ∅={ }

۲ــ جاهای خالی را طوری کامل کنید تا عبارت حاصل، درست باشد.

الف) عبارت «۵ عدد طبیعی که بین ۱ و ۲۰ قرار داشته باشد»، یک مجموعه را مشخص نمی‌کند.

ب) مجموعهٔ {۲,۳,۴,...,۹} دارای ۸ عضو است.

ج) مجموعهٔ A = {۰,∅} دارای ۲ عضو است.

د) با توجه به مجموعهٔ A = {۳,۵,۷,۹,۱۱} ؛ داریم : ۵ عضو A است یا با نماد ریاضی، ۵ ∈ A و ۱۲ عضو A نیست یا با نماد ریاضی، ۱۲ ∉ A.

۳ــ سه مجموعهٔ متفاوت بنویسید که عدد ۲ عضو آنها باشد.

{۲,۴} {۱,۲} {۰,۲,۴,۶}

## دو مجموعهٔ برابر

### فعالیت

| | | |
|---|---|---|
| ۱۰ | -۱۰ | ۱۲ |
| ۶ | ۴ | ۲ |
| -۴ | ۱۸ | -۲ |

۱ــ جدول عددهای صحیحِ روبه‌رو را طوری کامل کنید که مجموع عددهای روی هر سطر، هر ستون و هر قطرِ آن برابر ۱۲ شود؛ سپس مجموعهٔ عددهای سطر دوم جدول را بنویسید و آن را A بنامید.

$A=\{۶,۴,۲\}$

اکنون مجموعهٔ B را چنان بنویسید که شامل سه عدد زوج متوالی و میانگین عضوهای آن با ۴ برابر باشد. هریک از مجموعه‌های A و B چند عضو دارد؟ ۳عضو $B=\{۲,۴,۶\}$

آیا هر عضو A در مجموعهٔ B است؟ بله آیا هر عضو B در مجموعهٔ A است؟ بله

همان‌طور که ملاحظه کردید، عضوهای دو مجموعهٔ A و B یکسان‌اند و هر عضو A، عضوی از B و هر عضو B، عضوی از A است؛ در این صورت دو مجموعهٔ A و B برابراند و می‌نویسیم A = B.

$\cancel{x-1}+x+\cancel{x+1}=۲۷ \rightarrow ۳x=۲۷ \rightarrow x=۹ \rightarrow ۸,۹,۱۰$ عدد وسط

۲ــ مجموعهٔ A شامل سه عدد طبیعی متوالی است به‌طوری که حاصل جمع آنها برابر ۲۷ است. ابتدا A را با عضوهای آن بنویسید؛ سپس مجموعه‌هایی را مشخص کنید که در زیر معرفی شده و با A برابر است: $A=\{۸,۹,۱۰\}$

الف) مجموعهٔ عددهای طبیعی بین ۶ و ۱۰ ← $B=\{۷,۸,۹\}$

ب) مجموعهٔ عددهای طبیعی بزرگ‌تر از ۷ و کوچک‌تر از ۱۱ ← $C=\{۸,۹,۱۰\}$

ج) مجموعهٔ سه عدد طبیعی متوالی که میانگین آنها با ۹ برابر است. $D=\{۸,۹,۱۰\}$

همان‌طور که دیدید، مجموعهٔ {۸،۹،۱۰} با مجموعه {۷،۸،۹} برابر نیست؛ زیرا همهٔ عضوهایشان یکسان نیست.

اگر عضوی در A باشد که در B نباشد یا عضوی در B باشد که عضو A نباشد، در این‌صورت مجموعهٔ A با B برابر نیست و می‌نویسیم A ≠ B.

### کار در کلاس

۱ــ جاهای خالی را در مجموعه‌های زیر طوری پر کنید که مجموعه‌ها برابر باشد:

الف) $\left\{۵, -۳, \frac{۲}{۵}, ۴, \frac{۹}{۳}\right\} = \left\{\frac{۲}{۵}, ۳, \frac{-\sqrt{۱۴۴}}{(-۲)^۲}, ۴, \sqrt{۲۵}\right\}$

$\frac{-۱۲}{۴}=-۳$

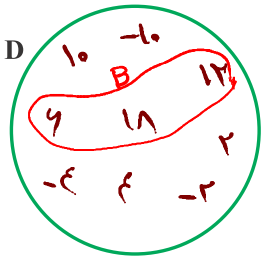
ب) $\{۷, \frac{۴}{۱۰}, \sqrt{\frac{۴}{۹}}, -\frac{۱}{۲}, -۲, ۰/۶۲۵\} = \{\frac{۲}{۳}, \frac{۲}{۵}, -۰/۵, \frac{۵}{۸}, ۷, -۲\}$

۲ــ دو مجموعه به نام‌های A و B مانند سؤال بالا طرح کنید. پاسخ خود را با دوستانتان مقایسه کنید.

## زیرمجموعه

### فعالیت

مجموعهٔ عددهای جدول فعالیت قبل را D بنامید؛ سپس عضوهای مجموعهٔ D را در نمودار وِن روبه‌رو بنویسید :




در نمودار بالا، عضوهایی را که بر ۳ بخش‌پذیر است، با یک منحنی بسته مشخص کنید و B بنامید.

مجموعهٔ B را بنویسید. آیا هر عضو B، عضوی از D نیز هست؟ بله B = {۶,۱۸,۱۲}

در مجموعهٔ D، عددهای زوج را مشخص کنید و آن را C بنامید؛ آیا D = C؟ بله

همان‌طور که دیدید، عضوهای مجموعهٔ B همگی در D هست؛ یعنی هر عضو B، عضوی از D است؛ در این صورت مجموعهٔ B **زیرمجموعهٔ** D است و می‌نویسیم $B \subseteq D$ .

آیا مجموعهٔ C زیرمجموعهٔ D است؟ بله

> با توجه به تعریف زیر مجموعه، واضح است که هر مجموعه، زیر مجموعهٔ خودش هست؛ یعنی اگر A مجموعه‌ای دلخواه باشد، داریم : $A \subseteq A$.

اکنون زیرمجموعه‌ای از D را مشخص کنید که عضوهای آن عددهای فرد باشد؛ نام دیگر این مجموعه چیست؟ مجموعه تهی

آیا عبارت $\{۱۰,۴,-۶,۲\} \subseteq D$ درست است؟ چرا؟ خیر - زیرا عدد −۶ به عنوان مجموعه هست ولی در D نیست

> اگر بتوانیم عضوی در B بیابیم که در A نباشد، می‌گوییم B زیرمجموعهٔ A نیست و می‌نویسیم $B \not\subseteq A$.

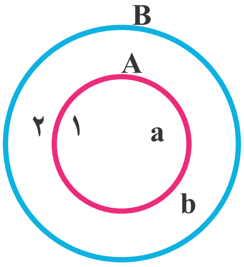
آیا در مجموعهٔ تُهی عضوی هست که در مجموعهٔ دلخواهی مانند A نباشد؟ خیر

> مجموعهٔ تهی زیرمجموعهٔ هر مجموعه‌ای دلخواه مانند A است؛ یعنی؛ $\varnothing \subseteq A$.

**مثال :** دلیل درستی رابطه‌های زیر مشخص شده است.

الف) $\{a,b,c,e\} \not\subseteq \{a,b,d\}$ ؛ زیرا در مجموعهٔ سمت چپ، d هست که در مجموعه سمت راست نیست.

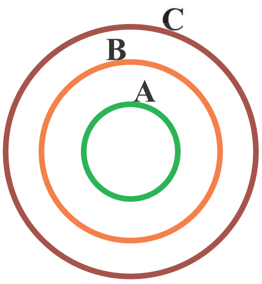
ب) $\{۴,۳,۰,۱,-۱,۲\} \subseteq \{-۱,۰,۱,۳\}$ ؛ زیرا هر عضو مجموعهٔ سمت چپ، عضوی از مجموعهٔ سمت راست است.




$A \subseteq B, B \not\subseteq A$

ج) با توجه به شکل مقابل $A \subseteq B$ درست است؛ زیرا همهٔ عضوهای A در B قرار دارند و $A \not\subseteq B$ درست است؛ زیرا عضوی در B مانند ۲ می‌توان یافت که در A وجود ندارد.

## کار در کلاس




۱ــ با توجه به نمودار مقابل، دلیل درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید :

قسمتی از B در A نیست — چون قسمتی از C در A نیست — A در C وجود دارد

$A \not\subseteq C$ ✗ ، $B \subseteq A$ ✗ ، $C \not\subseteq A$ ✓ ،

$\varnothing \subseteq A$ ✓ ، $B \subseteq C$ ✓ ، $A \subseteq B$ ✓

تهی زیرمجموعهٔ همهٔ مجموعه‌هاست — کل B در C وجود دارد — تمام A در B وجود دارد

۲ــ مجموعه‌های A، B و C را درنظر بگیرید؛ سپس درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید (با ذکر دلیل) :

$۳ \in B$ — $۴ \in A \rightarrow ۴ \notin B$

$A = \{۱,۳,۶,۴\}$ ، $B = \{۵,۱,۳\}$ ، $C = \{۲,۵,۱,۳,۶\}$

$a \in B$, $a \notin A$ — چون

$B \not\subseteq A$ ✓ ، $۳ \subseteq B$ ✗ ، $A \subseteq B$ ✗ ، $B \subseteq C$ ✓ ، $A \not\subseteq C$ ✓ ، $۲ \in A$ ✗

$\{۱,۴\} \in A$ ✗ ، $۶ \notin A$ ✗ ، $\{۵,۶\} \subseteq C$ ✓ ، $۵ \in C$ ✓ ، $۰ \subseteq A$ ✗ → $۰ \notin A$

$\{۱,۴\} \subseteq A$

۳ــ همهٔ زیرمجموعه‌های $A = \{a,b,c\}$ در زیر نوشته شده است :

$\varnothing, \{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}$

مانند نمونه، تمام زیرمجموعه‌های هریک از مجموعه‌های زیر را بنویسید :

الف) مجموعهٔ عددهای طبیعی بین ۹ و ۱۲. $\{۱۰,۱۱,۱۲\}$

$\{\}$ , $\{۱۰\}$ , $\{۱۱\}$ , $\{۱۲\}$ , $\{۱۰,۱۱\}$ , $\{۱۰,۱۲\}$ , $\{۱۱,۱۲\}$ , $\{۱۰,۱۱,۱۲\}$

ب) $\{a,b,c,d\}$ ←

$\{\}$ , $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$ , $\{a,b\}$, $\{a,c\}$ , $\{a,d\}$, $\{b,c\}$ , $\{b,d\}$, $\{c,d\}$, $\{a,b,c\}$, $\{a,b,d\}$, $\{a,c,d\}$ , $\{b,c,d\}$ , $\{a,b,c,d\}$

## نمایش مجموعه‌های اعداد

در سال‌های گذشته با عددهای طبیعی آشنا شده‌اید؛ از این عددها برای شمارش استفاده می‌کنیم.

مجموعهٔ عددهای طبیعی را با $\mathbb{N}$ نمایش می‌دهیم و آن را به‌صورت زیر می‌نویسیم :

$$\mathbb{N}=\{۱,۲,۳,۴,۵,...\}$$

تاکنون نمایش مجموعه‌ها را با عضوها و نمودار وِن آموخته‌اید. یک روش دیگر برای نمایش مجموعه‌ها استفاده از نمادهای ریاضی است؛ برای مثال : مجموعهٔ عددهای طبیعی زوج $E=\{۲,۴,۶,۸,...\}$ را درنظر بگیرید. می‌دانیم عضوهای این مجموعه خاصیت مشترکی دارد؛ یعنی همگی آنها مضرب ۲، است و از قبل می‌دانیم که هر عدد زوج طبیعی به‌صورت $۲k$ قابل نمایش است که در آن $k\in\mathbb{N}$ ، پس می‌نویسیم : $E=\{۲k \mid k\in\mathbb{N}\}$

و می‌خوانیم $E$ برابر است با مجموعهٔ عددهایی به شکل $۲k$ به‌طوری که $k$ متعلق به مجموعهٔ عددهای طبیعی است. در مجموعهٔ $E$ علامت « | » خوانده می‌شود : «به‌طوری که». در زیر چند مجموعه را با نمادهای ریاضی نوشته‌ایم :

الف) مجموعهٔ عددهای طبیعی فرد : $O=\{۲k-۱ \mid k\in\mathbb{N}\}$

ب) $A=\{۷,۸,۹,۱۰\}$ $\quad A=\{x\in\mathbb{N} \mid ۷\le x\le ۱۰\}$ یا $A=\{x\in\mathbb{N} \mid ۶<x<۱۱\}$

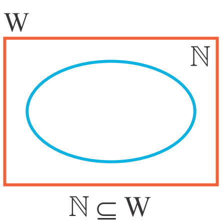
ج) زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{N}$ که عضوهای آن همگی بر ۳ بخش‌پذیر است : $\{۳k \mid k\in\mathbb{N}\}$

**مثال :** مجموعهٔ $A=\{۵n+۳ \mid n\in\mathbb{N}\}$ را با عضوهایش مشخص کنید :

برای این منظور جدول زیر را کامل کنید و در هر مرحله به‌جای n یک عدد طبیعی در ۵n+۳ قرار دهید.

| n | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | ۷ | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $۵n+۳$ | $\underbrace{۵(۱)+۳}_{۸}$ | $\underbrace{۵(۲)+۳}_{۱۳}$ | $\underbrace{۵(۳)+۳}_{۱۸}$ | $\underbrace{۵(۴)+۳}_{۲۳}$ | $\underbrace{۵(۵)+۳}_{۲۸}$ | $\underbrace{۵(۶)+۳}_{۳۳}$ | $\underbrace{۵(۷)+۳}_{۳۸}$ | ... |

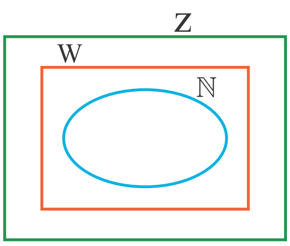
بنابراین داریم : $A=\{۸,۱۳,۱۸,۲۳,۲۸,۳۳,۳۸,...\}$




مجموعهٔ عددهای حسابی را با W نمایش می‌دهند : $W=\{۰,۱,۲,۳,...\}$

مجموعهٔ عددهای حسابی را می‌توان با نمادهای ریاضی به‌صورت $W=\{k-۱ \mid k\in\mathbb{N}\}$ نوشت.

هر عدد طبیعی یک عدد حسابی است؛ یعنی $\mathbb{N}\subseteq W$




مجموعهٔ عددهای صحیح را با $\mathbb{Z}$ نمایش می‌دهیم :

$$\mathbb{Z}=\{...,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,...\}$$

همهٔ عددهای طبیعی و حسابی، عضو $\mathbb{Z}$ هم هستند؛ پس : $\mathbb{N}\subseteq W\subseteq \mathbb{Z}$

## کار در کلاس

مجموعه‌های زیر را با عضوها مشخص کنید :

$C=\{\dots,-۳,-۱,۱,۳,\dots\}$ ، $A=\{-۵,-۴,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,۴\}$

الف) مجموعهٔ عددهای صحیح فرد ← C  ب) $A=\{x \mid x\in \mathbb{Z}, -۵\le x<۵\}$ ←

ج) $B=\{۳k+۲ \mid k\in \mathbb{Z}\}$ ← $B=\{\dots,-۷,-۴,-۱,۲,۵,۸,\dots\}$

مجموعه عددهای گویا را با Q نمایش می‌دهیم. چون اوّلین عدد گویای بزرگ‌تر از هر عدد گویا مشخص نیست، نمی‌توان این مجموعه را با عضوها مشخص کرد؛ به همین دلیل مجموعهٔ عددهای گویا را با نمادهای ریاضی تعریف می‌کنیم : $Q=\left\{\frac{a}{b} \middle| a,b\in \mathbb{Z}, b\neq ۰\right\}$

توجه کنید که هر عدد صحیح، عددی گویا است؛ یعنی برای هر عدد صحیح a داریم : $a=\frac{a}{۱}$، درنتیجه $\mathbb{Z}\subseteq Q$ .

## تمرین

۱ــ مجموعهٔ $A=\{-۲,-۱,۰,۱,۲\}$ را درنظر بگیرید. کدام‌یک از مجموعه‌های زیر با هم برابر است؟

$D=\{-۱,۱\}$  $C=\{-۱,۰,۱\}$  $B=\{-۱,۰,۱\}$

$B=\{x \mid x\in A, x^۲\le ۲\}$ ، $C=\{x \mid x\in A, -۱\le x\le ۱\}$ ، $D=\{x \mid x\in A, x^۴=۱\}$

۲ــ سه مجموعه مانند A، B و C بنویسید؛ به‌طوری که $A\subseteq B$ و $B\subseteq C$. آیا می‌توان نتیجه گرفت $A\subseteq C$؟ بله

$\left.\begin{array}{l} A\subseteq B \\ B\subseteq C \end{array}\right\} \Rightarrow A\subseteq C$

۳ــ تمام زیرمجموعه‌های هریک از مجموعه‌های زیر را بنویسید:

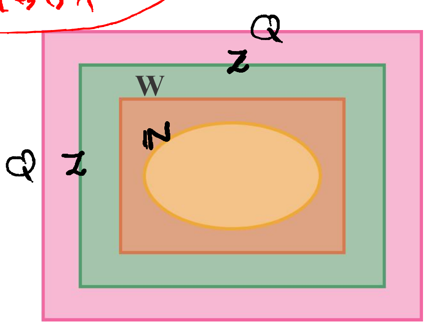
الف) $A=\{x \mid x\in \mathbb{N}, ۲x+۱=۳\}$  ب) $B=\{۲x \mid x=۰,۲,۳\}$

$B=\{۰,۴,۶\}$ : $\{\}, \{۰\}, \{۴\}, \{۶\}, \{۰,۴\}, \{۰,۶\}, \{۴,۶\}, \{۰,۴,۶\}$

$A=\{۱\} \rightarrow \varnothing, \{۱\}$

۴ــ نمودار روبه‌رو، وضعیت مجموعه‌های Q، W، $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ را نسبت به هم نشان می‌دهد؛ آنها را نام‌گذاری و با علامت $\subseteq$ باهم مقایسه کنید.

$\mathbb{N}\subseteq W\subseteq \mathbb{Z}\subseteq Q$




۵ــ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید :

مثال : $\frac{۱}{۲}\in Q \rightarrow \frac{۱}{۲}\notin W$

الف) هر عدد گویا عددی حسابی است. ✗  ب) هر عدد حسابی عددی گویاست. ✓

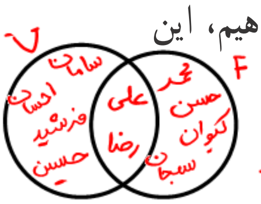
ج) هر عدد صحیح عددی گویاست. ✓  د) بعضی از عددهای گویا، عدد صحیح‌اند. ✓

## درس سوم: اجتماع، اشتراک و تفاضلِ مجموعه‌ها

### فعالیت

۱ــ در کلاس درس، علی و رضا عضو هر دو تیم والیبال و فوتبال هستند. سامان، احسان، فرشید و حسین فقط در تیم والیبال و محمّد، حسن، کیوان و سبحان فقط در تیم فوتبال بازی می‌کنند.

الف) اگر مجموعهٔ دانش‌آموزان عضو تیم والیبال را با V و فوتبال را با F نشان دهیم، این مجموعه‌ها را با نمودار وِن نمایش دهید و سپس با عضوهایشان بنویسید.




ب) مجموعهٔ دانش‌آموزانی را که در هر دو تیم عضویت دارند، بنویسید. {رضا، علی}

ج) مجموعهٔ دانش‌آموزانی را که حداقل در یکی از این دو تیم عضویت دارند، بنویسید.
{سامان، احسان، فرشید، حسین، علی، رضا، محمد، حسن، کیوان، سبحان}

۲ــ دو مجموعهٔ $A=\{x\in\mathbb{N} \mid x\leq ۶\}$ و $B=\{x\in\mathbb{Z} \mid -۲\leq x\leq ۳\}$ را درنظر بگیرید و مجموعه‌های زیر را با عضوهایشان تشکیل دهید:

الف) $A=\{$ ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶ $\}$ ب) $B=\{$ -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, ۳ $\}$

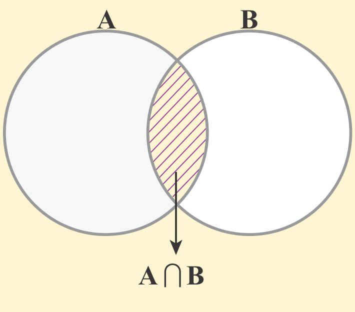
ج) مجموعهٔ عددهایی که در هر دو مجموعهٔ A و B هست $=\{$ ۱, ۲, ۳ $\}$

(این مجموعه را اشتراک A و B می‌نامیم و با نماد $A\cap B$ نشان می‌دهیم).

د) مجموعهٔ عددهایی که حداقل در یکی از دو مجموعهٔ A و B هست $=\{$ -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶ $\}$

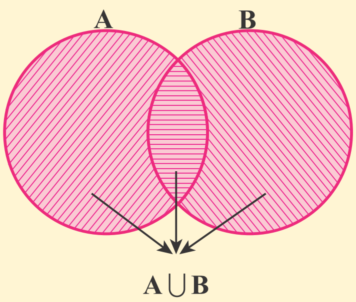
(این مجموعه را اجتماع A و B می‌نامیم و با نماد $A\cup B$ نشان می‌دهیم).

**اشتراک دو مجموعه :** اشتراک دو مجموعهٔ A و B، مجموعه‌ای شاملِ همهٔ عضوهایی است که هم عضو مجموعهٔ A و هم عضو مجموعهٔ B است. این مجموعه را با نماد $A\cap B$ نشان می‌دهیم. در نمودار روبه‌رو قسمت هاشور خورده اشتراک دو مجموعه را نشان می‌دهد.



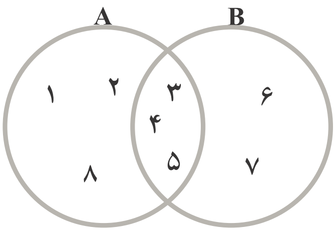

$A\cap B=\{x \mid x\in A$ و $x\in B\}$

**اجتماع دو مجموعه :** اجتماع دو مجموعهٔ A و B، مجموعه‌ای است شامل همهٔ عضوهایی که حداقل در یکی از دو مجموعهٔ A و B باشد. این مجموعه را با نماد $A\cup B$ نشان می‌دهیم. در نمودار، قسمت هاشور خورده، اجتماع دو مجموعه را نشان می‌دهد.




$A\cup B=\{x \mid x\in A$ یا $x\in B\}$

**مثال :** با توجه به نمودار زیر ابتدا مجموعه‌های A و B را با عضوهایشان می‌نویسیم و سپس $A\cap B$ و $A\cup B$ را تشکیل می‌دهیم :



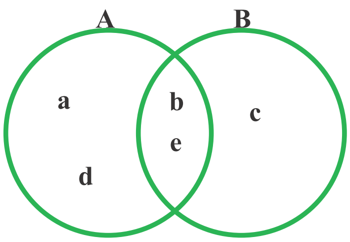

$A=\{۱,۲,۳,۴,۵,۸\}$ و $B=\{۳,۴,۵,۶,۷\}$

$A\cap B=\{۳,۴,۵\}$ , $A\cup B=\{۱,۲,۳,۴,۵,۸,۶,۷\}$

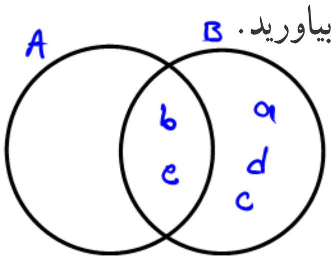
## فعالیت

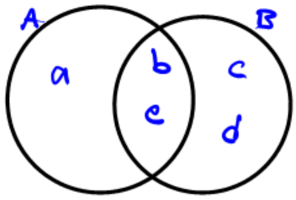
۱ــ دو مجموعهٔ $A\cup B=\{a,b,c,d,e\}$ و $A\cap B=\{b,e\}$ را درنظر بگیرید. از دانش‌آموزان یک کلاس خواسته شده است که با توجه به این دو مجموعه، مجموعه‌های A و B را با نمودار وِن نمایش دهند. پاسخ چهار دانش‌آموزِ این کلاس را در زیر می‌بینید :

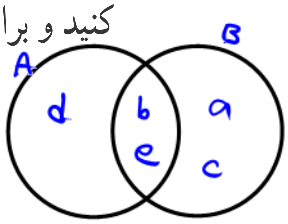
الف) دربارهٔ درستی یا نادرستی پاسخ این دانش‌آموزان بحث کنید و برای درستی یا نادرستی آنها دلیل بیاورید.

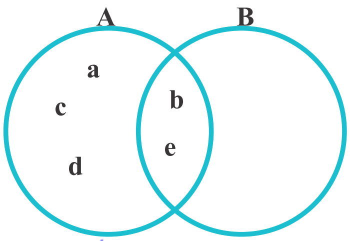



پاسخ حمیده ✓

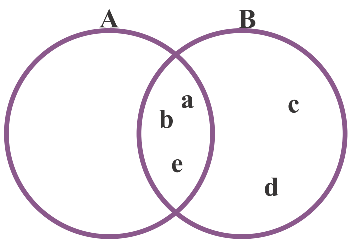


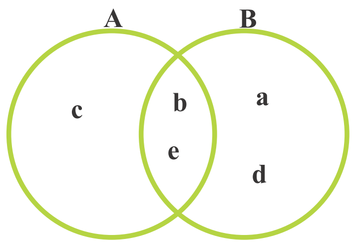




پاسخ ریحانه ✓




پاسخ زهرا ✗




پاسخ حنانه ✓

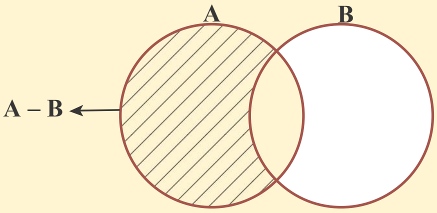
ب) آیا شما هم می‌توانید جواب درست دیگری به این سؤال بدهید؟ پاسخ خود را با پاسخ هم‌کلاسی‌های خود مقایسه کنید.

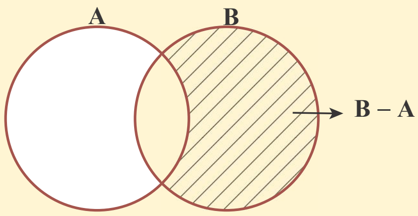
۲ــ با توجه به اوّلین فعالیت این درس و ورزشکاران دو تیم والیبال و فوتبال مجموعه‌ای تشکیل دهید که هر عضو آن عضو تیم والیبال باشد، ولی عضو تیم فوتبال نباشد (فقط در تیم والیبال بازی کند). این مجموعه را «V منهای F» می‌نامیم و با نماد $V-F$ نمایش می‌دهیم :

$V-F=\{$ سامان، احسان، فرشید، حسین $\}$  $F-V=\{$ محمد، حسن، کیوان، سجاد $\}$

**تفاضل دو مجموعه :** مجموعهٔ $A-B$ ($A$ منهای $B$) مجموعه‌ای است شامل همهٔ عضوهایی که عضو مجموعهٔ $A$ هستند؛ ولی عضو مجموعهٔ $B$ نیستند. در شکل زیر مجموعه‌های $A-B$ و $B-A$ هاشور خورده است :

$$A-B=\{x \mid x\in A, x\notin B\}$$



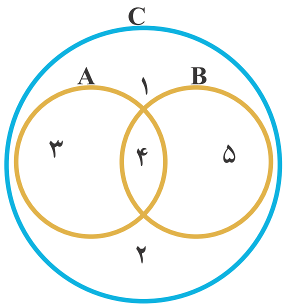




**مثال :** اگر $A=\{a,b,c,d,e,k\}$ و $B=\{c,d,k,f,s,t\}$ در این‌صورت :

$A-B=\{a,b,e\}$ و $B-A=\{f,s,t\}$

## کار در کلاس

۱ــ با توجه به نمودار زیر کدام عبارت، درست و کدام نادرست است؟




الف) $A\subseteq C$ ب) $B\subseteq C$ ج) $C\subseteq (A\cup B)$

د) $(A\cup B)\subseteq C$ هـ) $۲\in (A\cup B)$ و) $۴\notin (A\cap B)$

ز) $A\cup B=A$ ح) $۵\in (A\cup B)$ ط) $۴\in (A\cup B)$

۲ــ مجموعهٔ شمارنده‌های طبیعی عدد ۱۲ را $A$ و مجموعهٔ شمارنده‌های طبیعی عدد ۱۸ را $B$ بنامید. ابتدا $A$ و $B$ را تشکیل و سپس به سؤالات زیر پاسخ دهید :

$A=\{1,2,3,4,6,12\}$ , $B=\{1,2,3,6,9,18\}$

الف) مجموعه‌ای تشکیل دهید که هر عضو آن، شمارندهٔ ۱۸ باشد؛ ولی شمارندهٔ ۱۲ نباشد.

$B-A=\{9,18\}$

ب) مجموعه‌ای تشکیل دهید که عضوهای آن، هم شمارندهٔ ۱۲ و هم شمارندهٔ ۱۸ باشد.

$A\cap B=\{1,2,3,6\}$

۳ــ مجموعه‌های $(\mathbb{Z}-\mathbb{N})$، $(\mathbb{N}-\mathbb{Z})$ و $(W-\mathbb{N})$ را تشکیل دهید.

$\{0,-1,-2,\dots\}$ $\{\ \}$ $\{0\}$

**قرارداد :** تعداد عضوهای هر مجموعه مانند $A$ را با $n(A)$ نمایش می‌دهیم؛ به عنوان مثال، اگر $A$ مجموعه‌ای $k$ عضوی باشد، می‌نویسیم $n(A)=k$.

مثلاً اگر $A=\{۲,۴,۶,۷\}$ در این صورت $n(A)=۴$.

$A\cup B=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$ $A\cap B=\{\ \}$ $(A-B)\cup(B-C)=$
$B\cup C=\{۱,۵,۷,۳,۹,۱۰,۱۱\}$ $A-B=A$ $\{۲,۴,۶,۸,۹\}\cup\{۵,۳,۹\}=\{۵,۳,۹,۲,۴,۶,۸,۹\}$
$A\cup C=\{۲,۴,۶,۸,۹,۱,۷,۱۰,۱۱\}$ $C-B=\{۱۰,۱۱\}$ $(A\cup B)-C=\{۲,۳,۴,۵,۶,۸,۹\}$

## تمرین

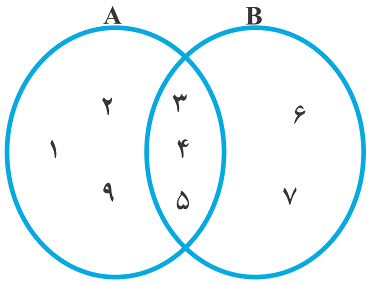
۱ــ مجموعه‌های $A=\{۲,۴,۶,۸,۹\}$ و $B=\{۱,۵,۷,۳,۹\}$ و $C=\{۱,۷,۱۰,۱۱\}$ را درنظر بگیرید؛ سپس هریک از مجموعه‌های زیر را با عضوهایشان مشخص کنید :

الف) $A\cup B$ ب) $B\cup C$ ج) $A\cup C$ د) $A\cap B$

هـ) $A-B$ و) $C-B$ ز) $(A-C)\cup(B-C)$ ح) $(A\cup B)-C$

ط) $A\cap A=A$ ی) $A\cap\varnothing=\varnothing$ ک) $B\cup B=B$ ل) $C\cup\varnothing=C$

۲ــ با توجه به نمودار زیر، عبارت‌های درست را با ✓ و گزاره‌های نادرست را با × مشخص کنید :




الف) $B-A=\{۶,۷\}$ ✓ ب) $(A-B)\cup(A\cap B)=A$ ✓

ج) $(A-B)\cup(B-A)=\{۱,۲,۶\}$ ×

د) $n(A\cup B)=۸$ ✓

هـ) $A-B=B-A$ × و) $n(A-B)=n(B-A)$ ×

۳ــ کلمات و مجموعه‌های داده شدهٔ زیر را در جاهای خالی قرار دهید :

۱) B ۲) A ۳) اجتماع

۴) زیرمجموعهٔ ۵) $(A\cup B)$

الف) اشتراک دو مجموعه، زیر مجموعهٔ __اجتماع__ همان دو مجموعه است.

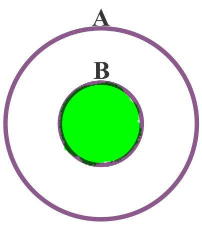
ب) هریک از دو مجموعهٔ A و B زیرمجموعهٔ __$(A\cup B)$__ است.

ج) اشتراک دو مجموعهٔ A و B __زیرمجموعهٔ__ هر یک از دو مجموعهٔ A و B است.

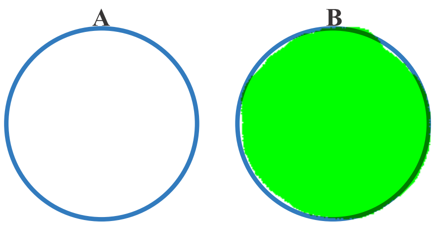
د) مجموعهٔ $A-B$ زیرمجموعهٔ مجموعهٔ __A__ است.

هـ) اجتماع دو مجموعهٔ $(B-A)$ و $(A\cap B)$ با مجموعهٔ __B__ مساوی است.

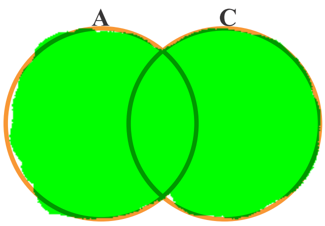
۴ــ در هریک از شکل‌های زیر مجموعهٔ موردنظر را هاشور بزنید.



$A\cap B$



$B-A$



$(A-C)\cup C$

در سال گذشته برای محاسبهٔ احتمال هر پیشامد از دستور زیر استفاده کردیم :

$$\text{احتمال رخ دادن یک پیشامد} = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد همهٔ حالت‌های ممکن}}$$

اکنون با توجه به آشنایی و شناخت شما نسبت به مجموعه‌ها و نمادگذاری‌ها، تا حدودی راحت‌تر می‌توان این فرمول را نوشت و به‌کار برد.

اگر مجموعهٔ شاملِ همهٔ حالت‌های ممکن را S، مجموعهٔ شاملِ همهٔ حالت‌های مطلوب را A و احتمالِ رخ دادن پیشامد A را با نماد $P(A)$ نشان دهیم، دستور بالا به‌صورت $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$ نوشته می‌شود.

## یادآوری

**مثال :** اگر تاسی را بیندازیم، احتمال هر یک از پیشامدهای زیر را به‌دست آورید :

الف) عدد رو شده مضرب ۳ باشد.

ب) عدد رو شده اوّل باشد.

ج) عدد رو شده از ۶ بزرگ‌تر باشد.

د) عدد رو شده از ۷ کمتر باشد.

**حل :** الف) پیشامد مطلوب یعنی رو شدن مضرب ۳ را A می‌نامیم؛ در این صورت داریم :

$$A=\{۳,۶\}\ ,\ S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\};\ n(A)=۲\ ,\ n(S)=۶$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$$

ب) B : پیشامد رو شدن عدد اوّل ; $B=\{۲,۳,۵\};\ n(B)=۳$

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

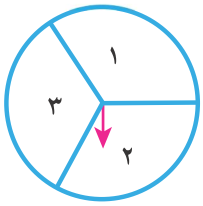
ج) C : پیشامد رو شدن عدد بزرگ‌تر از ۶ ; $C=\varnothing \rightarrow n(\varnothing)=۰$

$$P(C)=P(\varnothing)=\frac{۰}{۶}=۰$$

د) D : پیشامد رو شدن عدد کمتر از ۷ ; $D=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}=S$

$$P(D)=P(S)=\frac{n(S)}{n(S)}=\frac{۶}{۶}=۱$$

## فعالیت




با توجه به چرخندهٔ مقابل، همهٔ حالت‌های ممکن را که عقربه می‌تواند بایستد و عددی را نمایش دهد، مجموعهٔ S بنامید. S را با عضوهایش نمایش دهید و به سؤال‌های زیر پاسخ دهید : $S=\{۱, ۲, ۳\}$

الف) مانند نمونه برای هر مجموعه با بیان یک جمله، یک پیشامد تعریف کنید :

$A=\{۳,۱\}$ (عقربه روی ناحیهٔ ۱ یا ۳ بایستد) یا (عقربه روی عدد فرد بایستد)

$B=\{۱,۲\}$ عقربه روی عدد کمتر از ۳ بایستد

$C=\{۲,۳\}$ عقربه روی اعداد اول بایستد $D=\{۲\}$ عقربه روی عدد زوج بایستد

پاسخ خود را با پاسخ هم کلاسی‌هایتان مقایسه کنید.

ب) هریک از زیرمجموعه‌های S را پیشامد تصادفی می‌نامیم. احتمال رخداد هریک از این پیشامدها را به‌دست آورید. چه تعداد از این پیشامدها هم‌شانس‌اند؟ پاسخ‌های خود را با پاسخ هم کلاسی‌هایتان مقایسه کنید.

$P(A)=\frac{۲}{۳}$ $P(B)=\frac{۲}{۳}$ $P(C)=\frac{۲}{۳}$ $P(D)=\frac{۱}{۳}$

ج) همهٔ زیرمجموعه‌های S را تشکیل دهید.

$\{\}, \{۱\}, \{۲\}, \{۳\}, \{۱,۲\}, \{۱,۳\}, \{۲,۳\}, \{۱,۲,۳\}$

## کار در کلاس

۱۰ کارت یکسان با شماره‌های ۱ تا ۱۰ را داخل جعبه‌ای قرار می‌دهیم و تصادفی یک کارت بیرون می‌آوریم.

| ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | ۷ | ۸ | ۹ | ۱۰ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

الف) مجموعهٔ همهٔ حالت‌های ممکن $S=\{۱,۲,...,۱۰\}$ است. پیشامد A را به این صورت تعریف می کنیم که «عدد روی کارت خارج شده از ۵ کمتر باشد». مجموعهٔ A را تشکیل دهید و احتمال رخداد پیشامد آن را به‌دست آورید.

$A=\{۱, ۲, ۳, ۴\} \longrightarrow P(A)=\frac{۴}{۱۰}$

ب) مجموعه یا پیشامدی تعریف کنید که احتمال رخ دادنِ آن پیشامد، $\frac{۴}{۱۰}$ باشد.

عدد روی کارت خارج شده، شمارندهٔ ۶ باشد

ج) اگر B پیشامد خارج شدن عدد اوّل و C پیشامد خارج شدن عدد زوج باشد، مجموعه‌های B و C را تشکیل دهید و احتمال رخدادِ هریک را محاسبه کنید. آیا پیشامدهای B و C هم‌شانس‌اند؟ چرا؟ خیر زیرا:

$B=\{۲, ۳, ۵, ۷\} \longrightarrow P(B)=\frac{۴}{۱۰}$

$C=\{۲, ۴, ۶, ۸, ۱۰\} \longrightarrow P(C)=\frac{۵}{۱۰}$

$S = \{$(پ،پ،پ)، (پ،پ،د)، (پ،د،پ)، (پ،د،د)، (د،پ،پ)، (د،پ،د)، (د،د،پ)، (د،د،د)$\}$

## تمرین

۱ــ اگر تاسی را بیندازیم، چقدر احتمال دارد :

الف) عدد رو شده زوج باشد. $\frac{۳}{۶}$ ب) عدد رو شده زوج و از ۲ بزرگ‌تر باشد. $\frac{۲}{۶}$

ج) عدد رو شده زوج و اوّل باشد. $\frac{۱}{۶}$ د) عدد رو شده از ۳ کمتر باشد. $\frac{۲}{۶}$

۲ــ اگر خانواده‌ای دارای سه فرزند باشد، اوّلاً مجموعهٔ همهٔ حالت‌های ممکن را تشکیل دهید (هر عضو این مجموعه را به‌طور مثال به‌صورت (د،د،پ) نمایش دهید). ثانیاً چقدر احتمال دارد این خانواده دارای دو دختر (یعنی دقیقاً دو دختر) باشد؟ ← $\frac{۳}{۸}$

۳ــ در جعبه‌ای ۳ مهرهٔ قرمز و ۴ مهرهٔ آبی و ۵ مهرهٔ سبز وجود دارد. اگر ۱ مهره را تصادفی از این جعبه خارج کنیم، چقدر احتمال دارد :

الف) این مهره آبی باشد. $\frac{۴}{۱۲}$ ب) این مهره سبز نباشد. $\frac{۷}{۱۲}$

ج) این مهره قرمز یا سبز باشد. $\frac{۸}{۱۲}$

۴ــ اگر تاسی را دو بار بیندازیم (یا دو تاسِ آبی و قرمز را با هم بیندازیم)، چقدر احتمال دارد :
(اگر مجموعهٔ همهٔ حالت‌های ممکن را S بنامیم، $n(S) = ۳۶$)

الف) هر دو بار، عدد اوّل رو شود. $\frac{۹}{۳۶}$ ← $۳ \times ۳ = ۹$ ب) دو عدد رو شده، مثل هم باشد. $\frac{۶}{۳۶}$

ج) دو عدد رو شده، مضرب ۳ باشد. (۳،۳)، (۳،۶)، (۶،۳) $\frac{۳}{۳۶}$ د) مجموع دو عدد، ۷ باشد. (۱،۶)، (۶،۱)، (۲،۵)، (۵،۲)، (۳،۴)، (۴،۳) $\frac{۶}{۳۶}$

## خواندنی

در بسیاری از کتاب‌های ریاضی، از مجموعه به‌عنوان گروهی (یا دسته‌ای) از اشیا نام برده شده است. غافل از آنکه اگر بگوییم مجموعه گروهی از اشیا است، باید بگوییم گروه چیست؟! آیا می‌توانیم گروه را تعریف کنیم؟

درواقع چاره‌ای نیست جز آنکه مانند سیمورلیپ‌شوتز (ریاضی‌دان معاصر) بگوییم : در همهٔ شاخه‌های ریاضی مجموعه یک مفهوم بنیادی است. به عبارت دیگر مجموعه جزءِ نخستین تعریف نشده‌هاست، مانند مفاهیمی چون نقطه و خط در هندسه، که برای آنها تعریف دقیقی نداریم ولی آنها را با اثر خود می‌شناسیم.