استدلال و اثبات در هندسه

فصل ۳

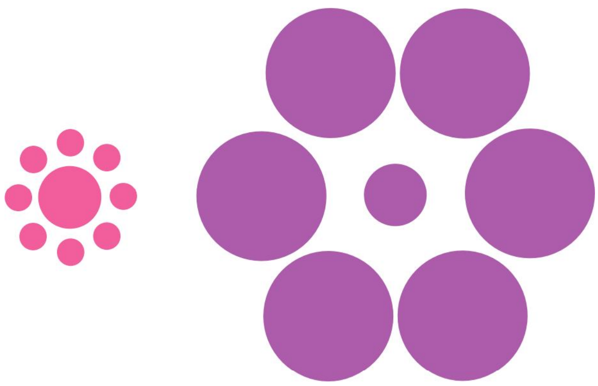
اُدعُ اِلیٰ سَبیلِ رَبِّکَ بِالحِکمَةِ وَ المَوعِظَةِ الحَسَنَةِ وَ جادِلهُم بِالَّتی هِیَ اَحسَنُ ...

با حکمت و اندرز نیکو به راه پروردگارت دعوت نما و با آنها به نیکوترین روش استدلال و مناظره کن! (سورهٔ نحل، آیهٔ ۱۲۵)

بارش برف از آسمان، رحمت الهی را با خود به زمین می‌آورد و در عین حال نماد زیبایی زمستان است. اما شاید جالب باشد بدانید که این دانه‌های زیبای متقارن که اغلب شش شاخه هستند، علی‌رغم آنکه میلیاردها دانه‌اند، امّا هر کدام شکل منحصر به خود را دارند و به نظر می‌رسد هیچ دو تایی از آنها «هم‌نهشت» نیستند!

درس اوّل: استدلال

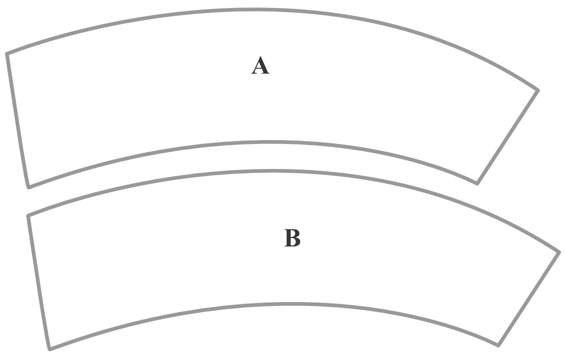
فعالیت



۱ــ کدام یک از دو قرصی که در مرکز قرار گرفته، بزرگ‌تر است؟ هیچکدام - هردو برابر هستند

الف) با مشاهده تشخیص دهید.

ب) یک کاغذ روی یکی از آنها قرار دهید. دایرهٔ محیط آن قرص را بکشید و با گذاشتن تصویر کشیده شده بر شکل دیگر، اندازهٔ آنها را با هم مقایسه کنید.



۲ــ اگر قطعه‌های A و B قطعه‌هایی از شیرینی مورد علاقهٔ شما باشد، کدام قطعه را انتخاب می‌کنید؟ (قطعهٔ بزرگ‌تر کدام است؟)

با یک کاغذ شفاف این دو قطعه را مقایسه کنید؟ آیا حدس شما درست بود؟

۳ــ آیا مشاهده کردن یا به‌طورکلی استفاده از حس‌های پنج‌گانه برای اطمینان از درستی یک موضوع کافی است؟ چرا؟ خیر - چون امکان خطا وجود دارد

هرچند به‌طور معمول در ریاضیات و به‌ویژه در هندسه استفاده از شکل، ترسیم و شهود به تشخیص راه‌حل‌ها و ارائهٔ حدس‌های درست کمک زیادی می‌کند، امّا به تشخیصی که براساس این روش‌ها حاصل می‌گردد، نمی‌توانیم به‌طور کامل اطمینان کنیم.

کار در کلاس

مواردی از درس علوم (مثل آزمایش تشخیص گرما و سرمای آب) مثال بزنید که حواس ما خطا می‌کند. در مورد نتایجی که از این مثال‌ها می‌گیرید، با یکدیگر بحث کنید.

فعالیت

متن‌های زیر را بخوانید و به سؤال‌ها پاسخ دهید :

۱ــ امیر و محسن برای دیدن مسابقه فوتبال به ورزشگاه رفتند. محسن به امیر گفت : «من مطمئن هستم که تیم مورد علاقهٔ من امروز هم می‌بازد.» امیر پرسید : «چگونه با این اطمینان حرف می‌زنی؟» محسن دلیل آورد که : «چون هر بار که به ورزشگاه رفته‌ام، تیم مورد علاقه‌ام باخته است.»

آیا دلیلی که محسن آورده است، درست است؟ چرا؟ خیر ــ نمی‌توان براساس مشاهدات و تجربه درمورد یک مسئله نظر قطعی ارائه داد

۲ــ عباس یک بیسکویت مستطیل شکل با ابعاد ۴ و ۸ سانتی‌متر دارد. بیسکویت باقر از همان نوع، به همان ضخامت و مربع شکل به ضلع ۶ سانتی‌متر است. با استفاده از دانش ریاضی خود نشان دهید که مقدار بیسکویت کدام یک بیشتر است. بسکویت دوم

$6\times6 > 8\times4$

۳ــ دلیلی را که محسن در فعالیت ۱ برای ادعای خود آورده است، با دلیلی که شما در فعالیت ۲ آوردید مقایسه کنید. به‌نظر شما کدام قابل اطمینان‌تر است؟ فعالیت ۲

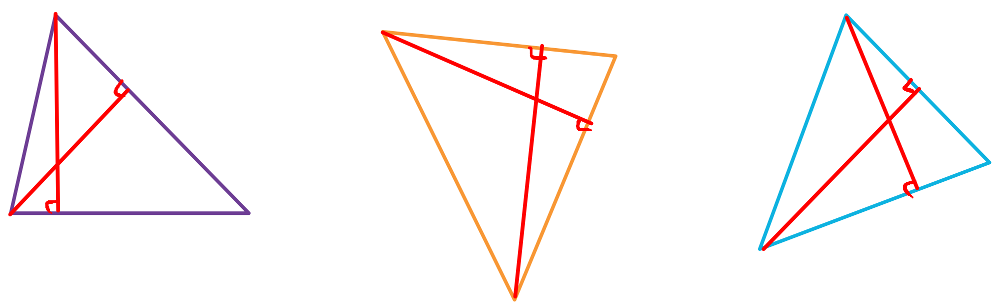
«استدلال» یعنی دلیل آوردن و استفاده از دانسته‌های قبلی، برای معلوم کردن موضوعی که در ابتدا مجهول بوده است.

همان‌گونه که در این موارد مشاهده کردید، حتی در بسیاری از کارهای روزمره نیز به استدلال نیاز پیدا می‌کنیم. راه‌های متفاوتی برای استدلال کردن هست که اعتبار و قابل اعتماد بودن آنها می‌تواند یکسان نباشد. به استدلالی که موضوع موردنظر را به‌درستی نتیجه بدهد، اثبات می‌گوییم.

کار در کلاس

۱ــ مواردی را بازگو کنید که مانند فعالیت ۱ فردی با توجه به رویدادهای گذشته، نتیجه‌ای می‌گیرد که درست نیست.

۲ــ دو ارتفاع از هر یک از مثلث‌های زیر، رسم کنید :



در مثلث های قائم الزاویه محل برخورد ارتفاع ها دقیقاً روی راس قائمه است

در مثلث های با زاویه باز محل برخورد ارتفاع ها بیرون مثلث است

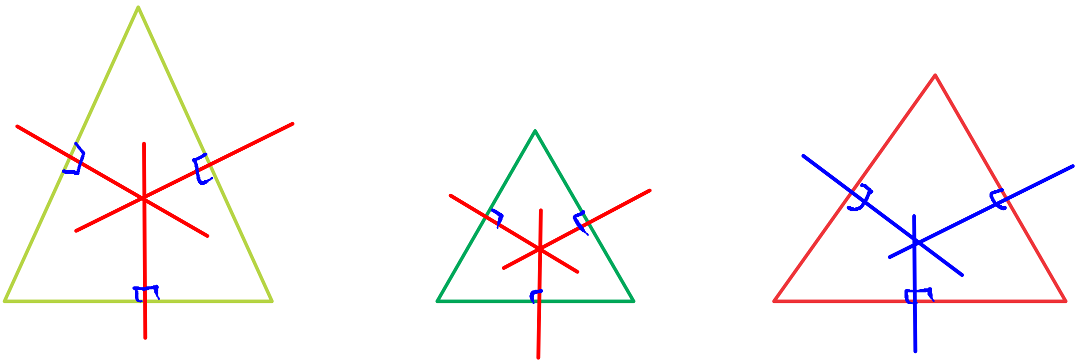
آیا با این مثال‌ها می‌توان نتیجه گرفت در هر مثلث، محل برخورد هر دو ارتفاع درون مثلث است؟ خیر

یک مثال بزنید که نتیجهٔ بالا را نقض کند.

اگر فردی با رسم ارتفاع‌های موردنظر در مثلث‌ها چنین نتیجه‌گیری کند که محل برخورد ارتفاع‌های هر مثلث، درون آن مثلث است، استدلال او مشابه کدام استدلال دو قسمت فعالیت قبل است؟ مشابه استدلال فعالیت ۱

تمرین

۱ــ در شکل‌های زیر عمودمنصف‌های سه ضلع مثلث‌ها را رسم کنید :



آیا فقط با توجه به این شکل‌ها، می‌توان نتیجه گرفت که محل برخورد عمودمنصف‌های هر مثلث همیشه درون مثلث قرار دارد؟ خیر چگونه می‌توانید درستی ادعای خود را نشان دهید؟ مثال نقض: در مثلث های قائم الزاویه محل برخورد عمودمنصف ها نقطه وسط وتر است

۲ــ نیما و پژمان مشغول دیدن مسابقات وزنه‌برداری بودند. وزنه‌برداری می‌خواست وزنه‌ای ۱۰۰ کیلویی را بلند کند. آنها هر دو عقیده داشتند که او نمی‌تواند وزنه را بلند کند؛ برای ادعای خود استدلال‌های متفاوتی می‌کردند.

نیما : زیرا هفتهٔ پیش این وزنه‌بردار تمرینات بهتری انجام داده بود، با این‌حال نتوانست وزنهٔ ۹۰ کیلویی را بلند کند.

پژمان : امروز دوشنبه است. من بارها مسابقات این وزنه بردار را دیده‌ام. او هیچ‌گاه در روزهای زوج موفق نبوده است.

استدلال کدام یک قابل اعتمادتر است؟ دربارهٔ استدلال‌ها بحث کنید. استدلال نیما قابل اعتمادتر است

۳ــ چون من تا به‌حال هیچ‌وقت تصادف نکرده‌ام، در سفر آینده نیز تصادف نخواهم کرد.
این استدلال مشابه کدام‌یک از استدلال‌های زیر است؟

الف) چون برخی مثلث‌ها قائم‌الزاویه‌اند؛ پس مثلث‌های متساوی‌الاضلاع هم قائم‌الزاویه‌اند.

ب) همهٔ فیلم‌های جنگی که تاکنون دیده‌ام، جذاب بوده‌اند. فیلمی که دیروز دیدم جذاب بود، پس فیلم جنگی بوده است.

ج) چون تمام بچه‌های خاله‌های من دختر هستند، پس بچهٔ خالهٔ کوچکم هم که به زودی به دنیا می‌آید دختر خواهد بود.

د) چون همهٔ قرص‌های مسکن خواب‌آور است، پس در این قرص‌ها ماده‌ای هست که باعث خواب‌آلودگی می‌شود.

$a>c$

۴ــ حمید و وحید می‌دانستند که علی، حسن، حسین و باقر برادرند و : علی از حسین بزرگ‌تر و حسن از باقر کوچک‌تر است و باقر از علی کوچک‌تر و حسن نیز از حسین کوچک‌تر است. هر دو نفر اعتقاد داشتند که علی از حسن بزرگ‌تر است؛ اما استدلال‌های متفاوتی می‌کردند.

$b<c$ $d<a$ $b<d$

حمید : در تمام خانواده‌هایی که دو فرزند به نام‌های علی و حسن داشته‌اند، علی فرزند بزرگ‌تر بوده است.

وحید : چون علی از حسین بزرگ‌تر و حسن از حسین کوچک‌تر است، پس علی از حسن بزرگ‌تر است.

$$\left.\begin{matrix} a>c \\ b<c \end{matrix}\right\} \Rightarrow a>b$$

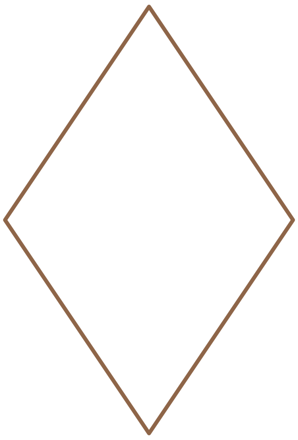
استدلال کدام یک درست است؟ دربارهٔ درستی استدلال‌ها بحث کنید.

۵ــ معلم از دانش‌آموزان خواست با استدلال ریاضی ثابت کنند که در مثلث متساوی‌الساقین زاویه‌های مجاور به قاعده با هم برابرند. احمد زاویه‌ها را با نقاله اندازه‌گیری کرد و نتیجه گرفت که زاویه‌ها مساوی هستند. چرا این روش برای اثبات کردن درست نیست؟ چرا اندازه‌گیری روش مناسبی برای نتیجه‌گیری نیست؟ روش اندازه‌گیری براساس مشاهده و تجربه است
و ما نمی‌توانیم یک قانون کلی را با مشاهده و تجربه و اندازه‌گیری ثابت کنیم
چون در مشاهدات امکان خطا وجود دارد

درس دوم: آشنایی با اثبات در هندسه

در درس گذشته آموختید که دیدن و استفاده از حواس یا ارائهٔ مثال‌های متعدد و همچنین توجه به ابعاد ظاهری برای ایجاد اطمینان از درستی یک موضوع کفایت نمی‌کند و باید از دلیل‌های منطقی و قانع‌کننده کمک گرفت و با استدلال، درستی آن موضوع را ثابت کرد. در روند استدلالمان از اطلاعاتِ مسئله (فرض یا داده‌ها) و حقایق و اصولی که درستی آنها از قبل برای ما معلوم شده است، برای رسیدن به خواستهٔ مسئله (حکم) استفاده می‌کنیم.

فعالیت



۱ــ به گفت‌وگوی زیر توجه کنید :

مهرداد : آیا در هر لوزی زاویه‌های روبه‌رو با هم برابر است؟

سعید : بله، من در یک کتاب هندسه دیدم که اثبات کرده بود در متوازی‌الاضلاع زاویه‌های روبه‌رو، با هم مساوی است و لوزی هم نوعی متوازی‌الاضلاع است.

در این مسئله و اثبات آن، فرض، حکم و استدلال را در زیر کامل کنید :

فرض : شکل لوزی است.

حکم : زاویه‌های روبرو برابر است.

استدلال :

لوزی نوعی متوازی‌الاضلاع است.

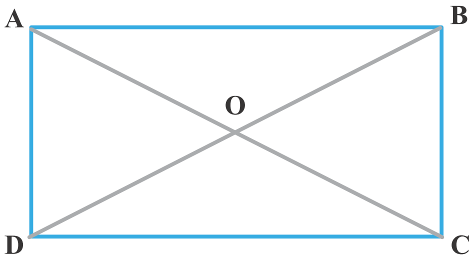
در متوازی‌الاضلاع زاویه‌های روبرو برابر است.

$\Rightarrow$ در لوزی زاویه‌های روبه‌رو برابر است

۲ــ اولین اقدامی که برای اثبات انجام می‌دهیم، تشخیص فرض، حکم و واقعیت‌های مرتبط با آن مسئله است که از قبل آنها را می‌دانستیم. در مسئلهٔ زیر فرض، واقعیت‌های از قبل ثابت شده یا دانسته و حکم را به زبان ریاضی بنویسید و عبارت‌ها را کامل کنید :

فرض : ABCD مستطیل است.

حکم : قطرهای مستطیل، مساوی است.



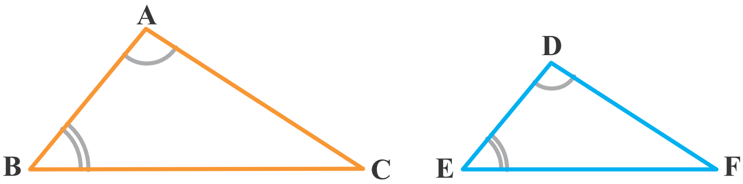
فرض و دانسته‌های قبلی :
$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ$
$AD = BC$, $AB = DC$
$AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$

حکم : $AC = BD$

کار در کلاس

فرض و حکم را برای مسئله‌های زیر مشخص کنید :

۱ــ در دو مثلث داده شده زوایای برابر در شکل مشخص شده است. ثابت کنید زاویه‌های سوم از دو مثلث نیز با هم برابر است.



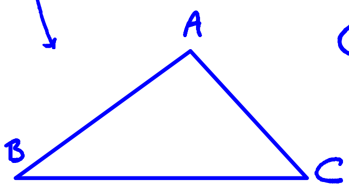
فرض : $\hat{A} = \hat{D}$ ، $\hat{B} = \hat{E}$

حکم : $\hat{C} = \hat{F}$

۲ــ اگر در یک مثلث دو زاویه نابرابر باشد، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ کوچک‌تر. (ابتدا شکل را رسم کرده و نام‌گذاری کنید.)

۳ــ نشان دهید در هر مثلث اندازهٔ هر زاویه خارجی با مجموع دو زاویهٔ داخلی غیرمجاور آن برابر است.

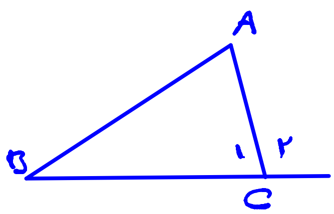
ج۲.



فرض : $\hat{A} > \hat{B}$

حکم : $BC > AC$

ج۳.

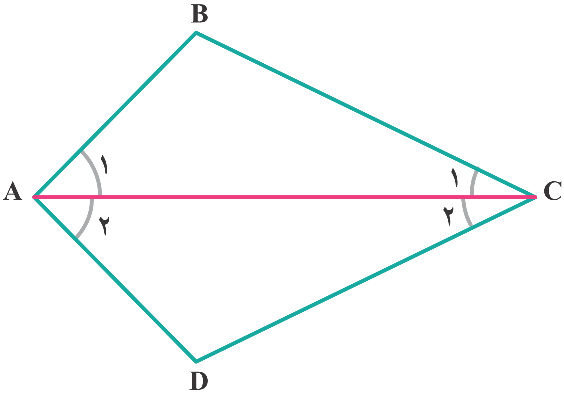


فرض : $\hat{C}_1 + \hat{C}_2 = 180^\circ$

حکم : $\hat{C}_2 = \hat{A} + \hat{B}$

فعالیت

۱ــ در مسئلهٔ زیر، فرض و حکم را بنویسید و اشکال استدلال داده شده را بیابید، سپس استدلال درستی برای آن بنویسید.

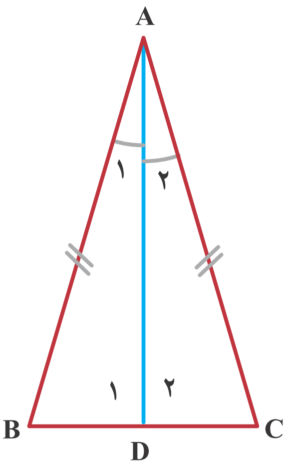


مسئله : در شکل مقابل پارخط AC نیمساز زاویهٔ A است و اضلاع AB و AD برابرند. ثابت کنید مثلث‌های مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{ADC}$ هم‌نهشت‌اند.

فرض: $(\hat{A}_1=\hat{A}_2 ,\ AB=AD)$ حکم: $\overset{\Delta}{ADC} \cong \overset{\Delta}{ABC}$

استدلال : چون AC نیمساز است، داریم $\hat{A}_1=\hat{A}_2$ و $\cancel{\hat{C}_1=\hat{C}_2}$ $AB=AD$ و از طرفی AC نیز ضلع مشترک در هر دو مثلث است، لذا دو مثلث ABC و ADC به حالت ~~دو زاویه و ضلع بین (زض ز)~~ (ض ز ض) هم‌نهشت‌اند.

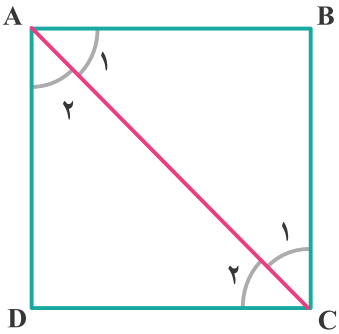
۲ــ مثلث زیر متساوی‌الساقین و AD نیمساز وارد بر قاعدهٔ آن است. با استدلال زیر نشان داده‌ایم که نیمساز وارد بر قاعده، میانه نیز می‌باشد.



$$\left.\begin{array}{ll} AB=AC & \text{(ساق‌های برابر)} \\ A_1=A_2 & \text{(نیمساز است AD)} \\ AD=AD & \text{(ضلع مشترک)} \end{array}\right\} \Rightarrow ABD \overset{\text{(ض ز ض)}}{\cong} ACD \Rightarrow BD=CD$$

لذا نقطهٔ D وسط BC است و AD میانه است.

آیا در مثلث ABC می‌توان نتیجه گرفت که نیمساز زاویهٔ B نیز میانهٔ ضلع مقابل آن است؟ خیر به عبارتی، آیا می‌توان خاصیت اثبات شده برای نیمساز A را به نیمساز دیگر تعمیم داد؟ خیر



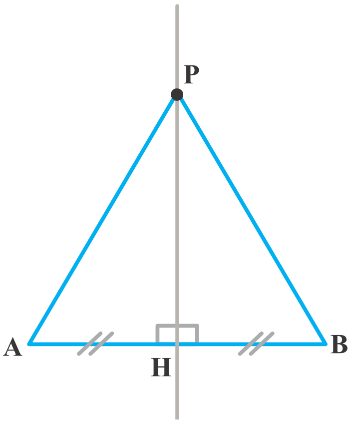
۳ــ با استدلال زیر به سادگی می‌توان نتیجه‌گیری کرد که قطر AC از مربع ABCD نیمساز زاویه‌های A و C است. چون دو مثلث ABC و ADC به حالت سه ضلع هم‌نهشت‌اند و زوایای متناظر با هم برابرند؛ بنابراین $\hat{A}_1=\hat{A}_2$ و $\hat{C}_1=\hat{C}_2$ و لذا AC نیمساز است.

آیا می‌توان با استدلالی مشابه، این خاصیت را به قطر دیگر نیز تعمیم داد و گفت به‌طور کلی در مربع هر قطر نیمساز زاویه‌های دو سر آن قطر است؟ بله

در فعالیت ۲، تمام ویژگی های بکار رفته برای نیمساز وارد بر قاعده، در نیمسازهای دیگر وجود ندارد ولی در فعالیت ۳
دو قطر مربع ویژگی های یکسانی دارند

۴ــ به‌نظر شما چرا در فعالیت ۲ خاصیت موردنظر قابل تعمیم به نیمسازهای دیگر نبود؛ اما در فعالیت ۳ خاصیت موردنظر به قطر دیگر تعمیم داده می‌شود؟

وقتی خاصیتی را برای یک عضو از یک مجموعه ثابت کردیم، اگر تمام ویژگی‌هایی که در استدلال خود به‌کار برده‌ایم، در سایر عضوهای آن مجموعه نیز باشد، می‌توان درستی نتیجه را به همهٔ عضوهای آن مجموعه تعمیم داد.



۵ــ نقطه‌ای مانند P، روی عمودمنصف پاره‌خط AB در نظر می‌گیریم و به دو سر پاره‌خط وصل می‌کنیم. چون دو مثلث AHP و BHP به حالت (ض ز ض) هم‌نهشت‌اند، نتیجه می‌گیریم پاره‌خط‌های PA و PB با هم برابر است.

بنابراین فاصلهٔ نقطهٔ P، که روی عمودمنصف پاره‌خط AB است، از دو سر پاره‌خط AB یکسان‌اند.

آیا این اثبات برای اینکه نتیجه بگیریم نتیجهٔ بالا برای «هر» نقطهٔ روی عمودمنصف برقرار است، کافی است؟ بله

کار در کلاس

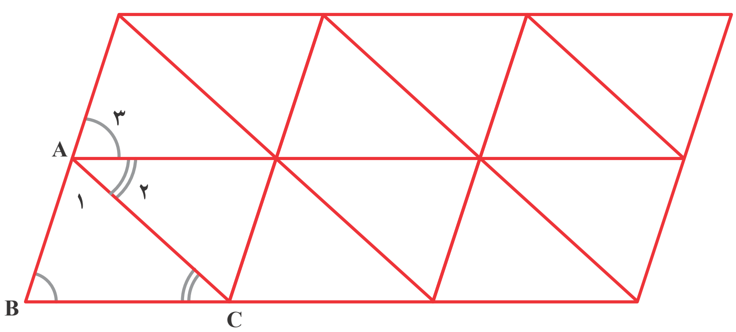
به استدلال‌هایی دقت کنید که چهار دانش‌آموز برای مسئلهٔ زیر آورده‌اند :

مسئله : مجموع زاویه‌های داخلی مثلث 180° است.

استدلال حامد : حامد گفت یک مثلث متساوی‌الاضلاع را درنظر می‌گیریم؛ چون سه زاویه دارد و هر زاویه 60° است، مجموع زاویه‌های مثلث 180° است.

استدلال حسین : حسین چند مثلث مختلف با حالت‌های گوناگون کشید و زوایای آنها را اندازه گرفت و دید که در همهٔ آنها مجموع زوایای داخلی برابر 180° است و نتیجه گرفت که مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است.

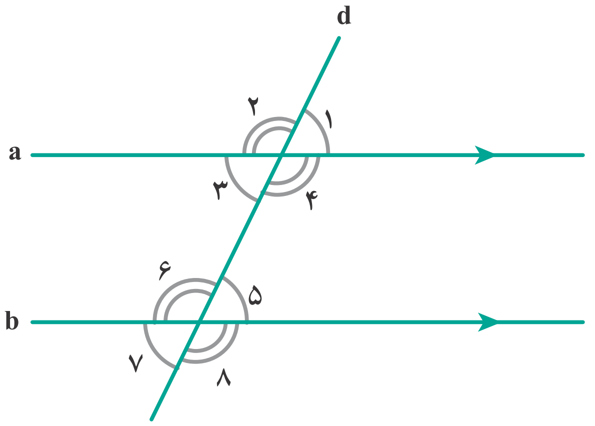
استدلال مهدی : مهدی شکل روبرو را، که از مثلث‌های هم‌نهشت تشکیل شده است کشید و با مشخص کردن زاویه‌های مثلث ABC مانند شکل



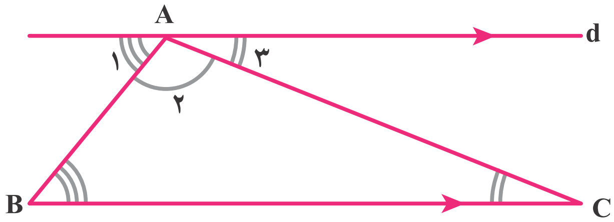
استدلالی با استفاده از شکل به‌صورت زیر آورد :

$$\hat{A}_1+\hat{B}+\hat{C}=\hat{A}_1+\hat{A}_3+\hat{A}_2=180^\circ$$

استدلال رضا : رضا گفت می‌دانیم که «هر خطی که دو خط موازی را قطع کند، با آنها هشت زاویه می‌سازد که مانند شکل چهار به چهار با هم مساوی‌اند».



حال مثلث دلخواه مانند $\overset{\Delta}{ABC}$ را درنظر می‌گیریم؛ مانند شکل مقابل از رأس A خط d را موازی BC رسم می‌کنیم. سه زاویهٔ تشکیل شده در رأس A را با شماره‌های ۱، ۲ و ۳ نشان داده‌ایم که زاویهٔ A_2 همان زاویهٔ A در مثلث است و با درنظر گرفتن AB به‌عنوان مورّب داریم : $\hat{B}=\hat{A}_1$ و با درنظرگرفتن AC به‌عنوان مورب داریم : $\hat{C}=\hat{A}_3$ پس با جای‌گذاری $\hat{A}_1$ و $\hat{A}_3$ به‌ترتیب به جای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ خواهیم داشت : $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\hat{A}_2+\hat{A}_1+\hat{A}_3=180^\circ$



استدلال رضا را می‌توان با استفاده از نمادهای ریاضی مرتّب و خلاصه کرد و بدین‌صورت نوشت :

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r} d \parallel BC \\ \text{و} \\ \text{مورب } AB \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{B}=\hat{A}_1 \\ \left.\begin{array}{r} d \parallel BC \\ \text{و} \\ \text{مورب } AC \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{C}=\hat{A}_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\hat{A}_2+\hat{A}_1+\hat{A}_3=180^\circ$$

دربارهٔ معتبر بودن استدلال‌های این دانش‌آموزان بحث کنید. فقط استدلال رضا درست و معتبر است

فعالیت

مسئله : حمید، سعید و بهرام هر کدام مقداری پول دارند. مجموع پول‌های حمید و بهرام برابر ۵۰۰۰ تومان و مجموع پول‌های سعید و بهرام نیز برابر ۵۰۰۰ تومان است. به‌نظر شما پول حمید بیشتر است یا پول سعید؟ دلیل خود را توضیح دهید.

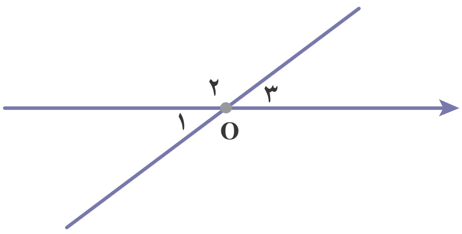
$$\left.\begin{array}{l} H+B=5000 \\ S+B=5000 \end{array}\right\} \Rightarrow H=S$$

پول حمید ← H
پول سعید ← S
پول بهرام ← B

بین استدلالی که برای مسئلهٔ قبل و مسئلهٔ بعدی هست، چه شباهتی می‌بینید؟

مسئله : نشان دهید زاویه‌های متقابل به رأس با هم برابرند.

فرض کنیم $\hat{O}_1$ و $\hat{O}_3$ مانند شکل زیر متقابل به رأس باشد، داریم :

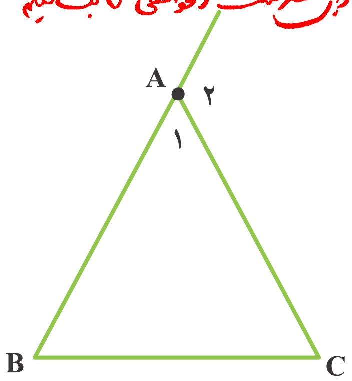


$$\left.\begin{array}{l}\hat{O}_1+\hat{O}_2=180^\circ\\ \hat{O}_3+\hat{O}_2=180^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{O}_1+\hat{O}_2=\hat{O}_3+\hat{O}_2\Rightarrow \hat{O}_1=\hat{O}_3$$

تمرین

در این استدلال فقط یک نوع مثلث (یعنی مثلث متساوی‌الاضلاع) مورد بررسی قرار گرفته است
درصورتی که ما باید این قانون را برای هر مثلث دلخواهی ثابت کنیم

۱ــ آیا اثبات مسئله زیر معتبر است؟ خیر برای پاسخ خود دلیل بیاورید.



مسئله : در هر مثلث، اندازهٔ زاویهٔ خارجی با مجموع اندازه‌های دو زاویهٔ داخلی غیرمجاور با آن برابر است.

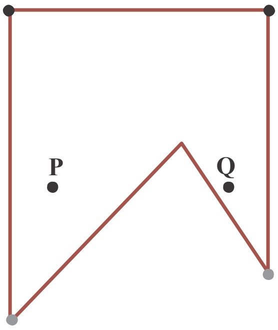
اثبات : مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را درنظر می‌گیریم.

می‌دانیم که مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است و زوایای $\hat{A}_1$ و $\hat{B}$ و $\hat{C}$ هر کدام 60° است؛ بنابراین

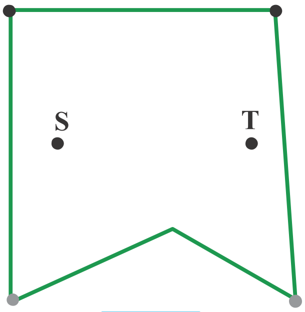
$$\hat{A}_1+\hat{A}_2=180\rightarrow \hat{A}_2=180-\hat{A}_1=180-60=120$$

$$\hat{B}+\hat{C}=60+60=120 \qquad \Rightarrow \hat{A}_2=\hat{B}+\hat{C}$$

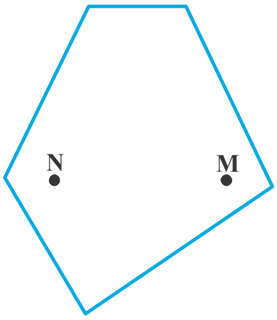
۲ــ در سال گذشته با تعریف چند ضلعی‌های محدب آشنا شدید. تعریف چندضلعی محدب را می‌توان بدین صورت هم آورد : «یک چندضلعی محدب است؛ اگر هر پاره‌خطی که دو نقطهٔ دلخواهِ درون آن چندضلعی را به‌هم وصل می‌کند، به‌طور کامل درون آن چند ضلعی قرار بگیرد.» هر ضلعی که محدب نباشد، مقعر است. آیا تشخیص‌های سه دانش‌آموز در مورد محدب و مقعر بودن چندضلعی‌های زیر و دلایلی که ارائه کرده‌اند، با توجه به تعریف بالا درست است؟ پاسخ خود را توضیح دهید.



نرگس : چند ضلعی مقابل محدب نیست؛ زیرا نقاط P و Q درون آن قرار دارد اما پاره‌خطی که آنها را به‌هم وصل می‌کند، به‌طور کامل در آن قرار نمی‌گیرد. کاملاً درست است.



مهدیه : چندضلعی مقابل محدب است؛ زیرا نقاط T و S درون آن قرار دارد و پاره‌خطی که آنها را به‌هم وصل می‌کند، نیز به‌طور کامل در آن قرار دارد. تشخیص نادرست و استدلال نیز نادرست است.



مریم : چندضلعی مقابل محدب است؛ زیرا نقاط M و N درون آن قرار دارد و پاره‌خطی که آنها را به‌هم وصل می‌کند، نیز به‌طور کامل در آن قرار دارد. تشخیص درست است ولی استدلال او برای اثبات محدب بودن کافی نیست

۳ــ آیا استدلال‌های زیر درست است؟ پاسخ خود را توضیح دهید.

الف) ✗
هر مستطیل یک متوازی‌الاضلاع است.
چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع است. ⇐ ABCD مستطیل است.
ABCD می‌تواند لوزی نیز باشد

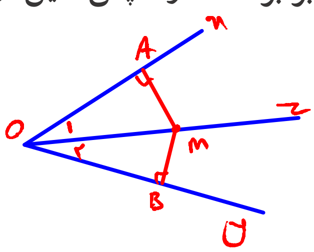
ب) ✗
در هر مربع، ضلع‌ها با هم برابرند.
ABCD مربع نیست. ⇐ همهٔ ضلع‌های ABCD، با هم برابر نیستند.
ABCD می‌تواند لوزی باشد

ج) ✓
در هر مربع، ضلع‌ها با هم برابرند.
در چهارضلعی ABCD ضلع‌ها برابر نیستند. ⇐ ABCD مربع نیست.

۴ــ ثابت کنید هر نقطه که روی نیمساز زاویه قرار دارد، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.

یادآوری : فاصلهٔ یک نقطه از یک خط برابر است با طول پاره‌خطی که از آن نقطه بر خط عمود می‌شود.

راهنمایی : یک زاویهٔ دلخواه بکشید و نیمساز آن را رسم، و یک نقطه روی این نیمساز مشخص کنید. ثابت کنید فاصلهٔ این نقطه از دو ضلع زاویه با هم برابر است و سپس دلیل آن‌را که این نتیجه برای همهٔ نقاطِ روی نیمساز درست است، بیان کنید.

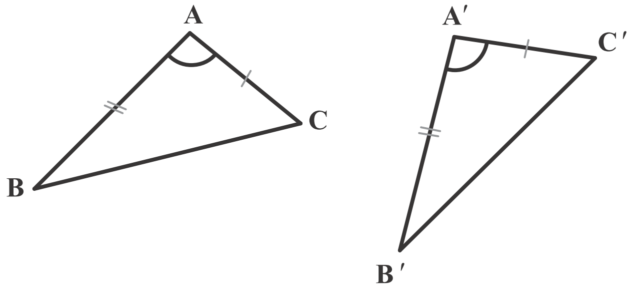


فرض : Oz نیمساز xOy است. حکم : MA=MB

$\hat{O}_1=\hat{O}_2$
$OM=OM$
$\hat{A}=\hat{B}=90$
$\xrightarrow{\text{وز}} \hat{AOM} \cong \hat{BOM} \Rightarrow AM=BM$

یادآوری

با مفهوم هم‌نهشتی مثلث‌ها از سال گذشته آشنایی دارید. اکنون می‌خواهیم این حالت‌ها را با استفاده از نمادهای ریاضی خلاصه نویسی کنیم؛ مثلاً حالت هم‌نهشتی(ض ز ض) را این‌گونه نمایش می‌دهیم :

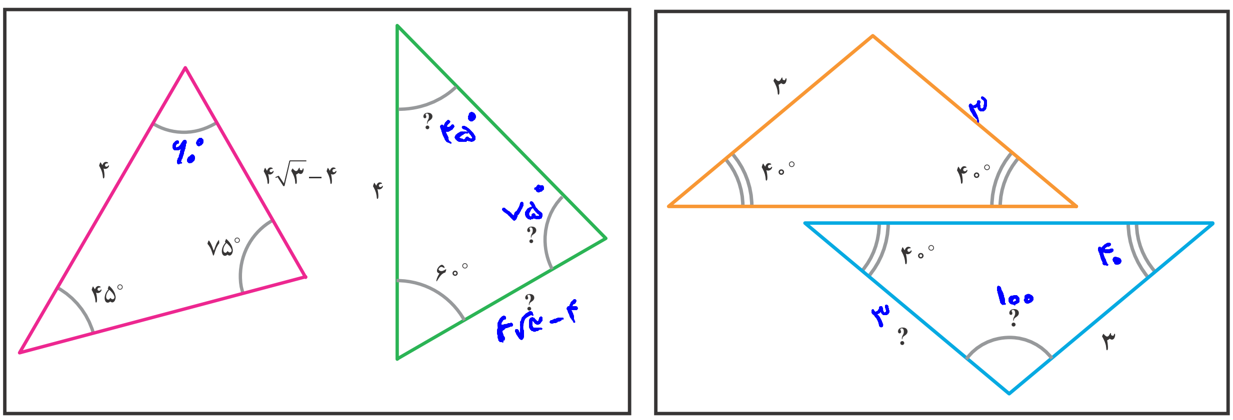


$$\left.\begin{aligned} AB &= A'B' \\ \hat{A} &= \hat{A'} \\ AC &= A'C' \end{aligned}\right\} \xRightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

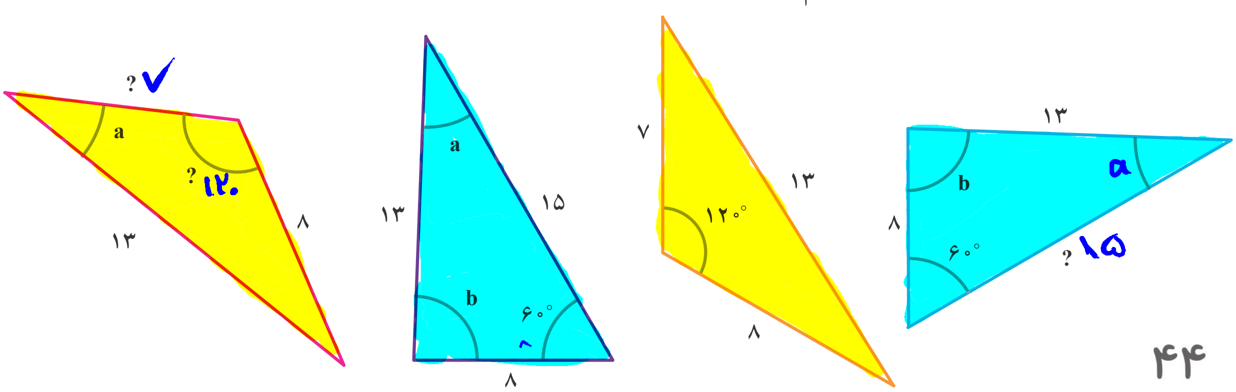
برای یادآوری، دو حالت دیگر هم‌نهشتی مثلث‌ها و دو حالت هم‌نهشتی ویژهٔ مثلث‌های قائم‌الزاویه را به همین صورت بیان کنید.

فعالیت

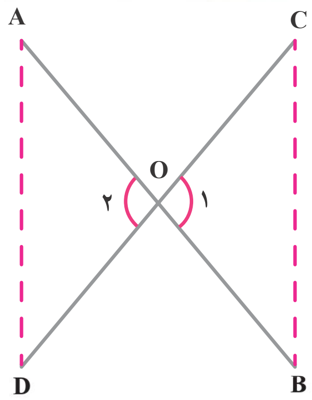
۱ــ در شکل‌های زیر، دو مثلثِ داخل هر کادر با یکدیگر هم‌نهشت‌اند. اندازهٔ پاره‌خط‌ها و زاویه‌های مجهول را روی شکل مشخص کنید :



۲ــ در شکل زیر چهارمثلث رسم شده که دو به دو با یکدیگر هم‌نهشت‌اند. ابتدا مثلث‌های هم‌نهشت را مشخص کنید و سپس اندازه‌های مجهول را که با «؟» مشخص شده، تعیین نمایید (زاویه‌هایی که با یک حرف مشخص شده با هم مساوی است).



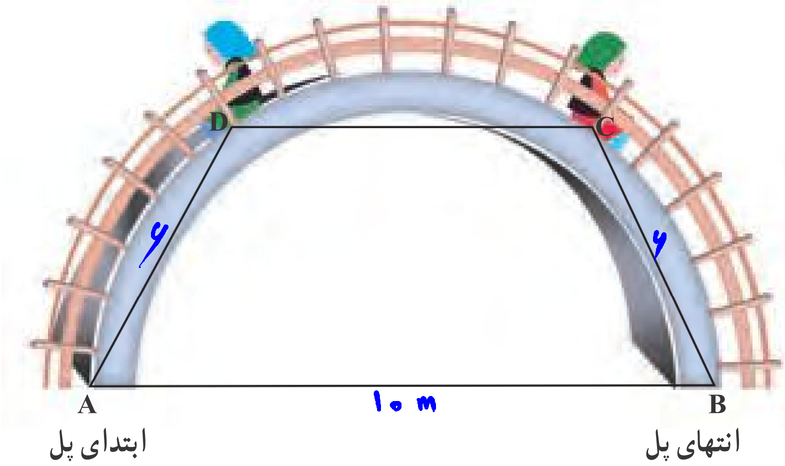
مثال : با رحل‌های قرآنی، حتماً آشنایی دارید. در نمونه‌ای از آنها دو لایهٔ چوبی آن از وسط یکدیگر گذشته است. می‌خواهیم نشان دهیم که این تکیه‌گاه در هر وضعیتی که باشد، مطابق شکل، همواره فاصلهٔ دو لبهٔ کناری آن در دو طرف با هم برابر است. به زبان ریاضی، یعنی در شکل زیر، فرض مسئله این است : OC=OD و OA=OB (چرا؟) و حکم این است : AD=BC. زوایای $\hat{O}_1$ و $\hat{O}_2$ برابرند (چرا؟) متقابل به رأس، پس مثلث‌های OAD و OBC هم‌نهشت هستند و از آنجا درستی حکم به‌دست می‌آید؛ یعنی :

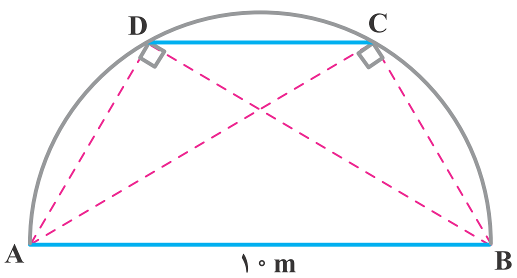


$$\left.\begin{array}{l} OA=OB\\ \hat{O}_1=\hat{O}_2\\ OC=OD\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{ض‌زض}} \overset{\Delta}{OBC}\cong\overset{\Delta}{OAD}\Rightarrow AD=BC$$

فعالیت

در نزدیکی منزل ترانه و شهرزاد، بوستانی هست که در آن یک پل فلزی به شکل نیم‌دایره وجود دارد بچه‌ها برای بازی از پله‌های آن بالا می‌روند. می‌دانیم فاصلهٔ ابتدای پل (نقطهٔ A) از انتهای آن (نقطهٔ B) ۱۰ متر است. ترانه روی پلهٔ C نشسته است که از انتهای پل ۶ متر فاصله دارد (BC=۶) و شهرزاد روی پلهٔ D نشسته است که از ابتدای پل همین مقدار فاصله دارد. آنها حدس می‌زنند که باید فاصله‌شان از پایه‌های مقابل برابر باشد؛ یعنی AC=BD. درستی حدس آنها را به دو روش ثابت کنید.





زاویه های $\hat{C}$ و $\hat{D}$ زاویه های محاطی هستند و AB قطر دایره می باشد و چون زاویه محاطی نصف کمان مقابل است پس هر کدام ۹۰ هستند. اکنون با فیثاغورس AC و BD را بدست می آوریم

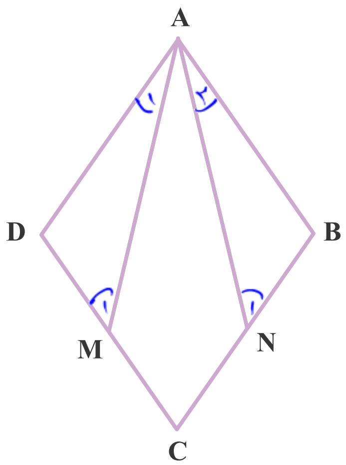
۱ــ نشان دهید زاویه‌های $\hat{C}$ و $\hat{D}$ در شکل، قائمه است. طول‌های AC و BD را به کمک قضیهٔ فیثاغورس محاسبه کنید و نشان دهید : AC=BD

$AC^2 = 10^2 - 6^2 = 64 \to AC = 8$

$BD^2 = 10^2 - 6^2 = 64 \to BD = 8$

۲ــ به کمک هم‌نهشتی مثلث‌های ACB و ADB، نشان دهید AC=BD.

فعالیت



در شکل مقابل ABCD لوزی است و نقطه‌های M و N وسط‌های اضلاع CD و CB هستند. می‌خواهیم نشان دهیم $\overset{\Delta}{ADM} \cong \overset{\Delta}{ABN}$

۱ــ با توجه به ویژگی‌های لوزی، تساوی‌های زیر را کامل کنید :

فرض $\begin{cases} AD = AB = BC = CD \quad , \quad BN = NC \\ \hat{A} = \hat{C} \; , \; \hat{B} = \hat{D} \quad , \quad DM = MC \end{cases}$

حکم : $\overset{\Delta}{ADM} \cong \overset{\Delta}{ABN}$

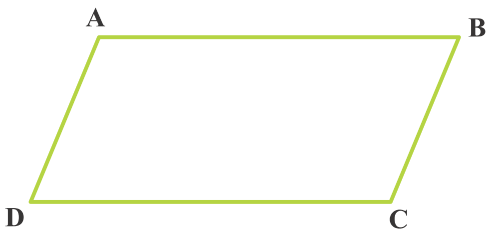
۲ــ با توجه به نتیجهٔ قسمت (۱) و تساوی‌های قسمت اوّل، ثابت کنید مثلث‌های ABN و ADM هم‌نهشت‌اند.

$BC = CD \Rightarrow \frac{BC}{2} = \frac{CD}{2} \Rightarrow \left.\begin{matrix} BN = DM \\ AB = AD \\ \hat{B} = \hat{D} \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\Delta}{ABN} \cong \overset{\Delta}{ADM}$

۳ــ حال با توجه به هم‌نهشتی دو مثلث ABN و ADM، اجزای متناظر آنها را بنویسید.

$\xrightarrow{\text{اجزا متناظر}} \begin{cases} AN = AM \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ \hat{M}_1 = \hat{N}_1 \end{cases}$

کار در کلاس



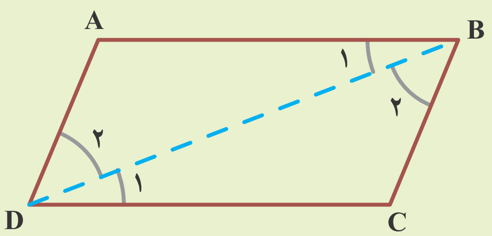
می‌خواهیم ثابت کنیم که در هر متوازی‌الاضلاع، مانند شکل روبه‌رو، ضلع‌های مقابل، همواره با هم برابرند. مفروضات و داده‌های مسئله چیست؟ تمام آنها را بنویسید؛ حکم مسئله چیست؟ نظر دو دانش‌آموز را دربارهٔ این مسئله ببینید و به سؤال‌های مطرح شده پاسخ دهید.

شهرزاد : معلوم است که ضلع‌های روبه‌رو با هم مساوی است؛ با چشم هم می‌توان دید!

شبنم : می‌دانیم که در تعریف متوازی‌الاضلاع، برابری ضلع‌های روبه‌رو آورده شده است. علاوه بر آن با اندازه‌گیری هم می‌توانیم این موضوع را نشان دهیم.

● آیا می‌توانیم در حل مسائل هندسه فقط به چشم‌هایمان اعتماد کنیم؟ خیر چرا؟ چون ممکن است دچار خطا شویم

● به تعریف متوازی‌الاضلاع در کتاب سال گذشته مراجعه کنید. آیا برابری اضلاع مقابل در این تعریف وجود داشت؟ آیا اگر با اندازه‌گیری اضلاع مقابل، برابری آنها را ببینیم، درستی حکم را ثابت کرده‌ایم؟ چرا؟ خیر با اندازه‌گیری در واقع فقط این حکم را در یک شکل خاص از گروه متوازی‌الاضلاع‌ها ثابت کرده‌ایم. در واقع یک مثال را بررسی کرده‌ایم.



ترانه : به نظر من باید دو مثلث هم‌نهشت بیابیم و با اثبات هم‌نهشتی آنها به برابری اضلاع مقابل در متوازی‌الاضلاع برسیم؛ امّا در شکل دو مثلث نداریم، پس با اضافه کردن یک خط، یعنی یکی از قطرها، دو مثلث ایجاد می‌کنیم.

اثبات را به‌صورت زیر کامل کنید :

$AB \parallel CD$, مورب BD $\Rightarrow \hat{B}_۱ = \hat{D}_۱$

(ضلع مشترک) $BD = BD$

$AD \parallel BC$ و مورب $BD \Rightarrow \hat{B}_۲ = \hat{A}_۲$

$\xrightarrow{(\text{ز ض ز})} \overset{\Delta}{ABD} \cong \overset{\Delta}{BCD}$

با توجه به هم‌نهشتی دو مثلث ABD و CBD، تساوی‌های زیر را کامل کنید.

دیدیم که $\hat{B}_۱ = \hat{D}_۱$ است؛ بنابراین داریم : $AD = BC$

و $\hat{B}_۲ = \hat{D}_۲$ است؛ بنابراین داریم : $AB = DC$

● چرا برای اثبات هم‌نهشتی مثلث‌های ایجاد شده، نمی‌توانیم از حالت‌های (ض ز ض) و (ض ض ض) استفاده کنیم؟ دو ضلع از مثلث‌های ایجاد شده اضلاع متوازی‌الاضلاع هستند و تساوی اضلاع مقابل در متوازی‌الاضلاع حکم مسئله ما است

● با توجه به مباحث درس قبل (هندسه و استدلال) بگویید آیا می‌توانستیم همین نتیجه را با رسم قطر AC به‌دست آوریم؟ بله

● از هم‌نهشتی مثلث‌های ایجاد شده در متوازی‌الاضلاع، به‌جز برابری ضلع‌های مقابل، نتیجهٔ دیگری هم دربارهٔ زاویه‌های متوازی‌الاضلاع به‌دست می‌آید؛ این نتیجه را بنویسید.

● در هر متوازی‌الاضلاع زاویه‌های روبه‌رو، مساوی‌اند.

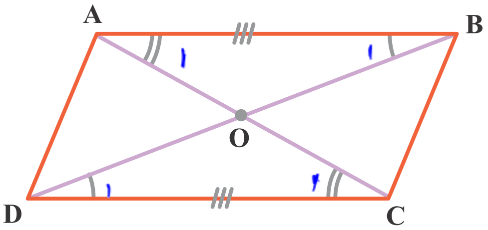
$(AB \parallel DC, \text{مورب } AC) \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{C}_1$

$(AB \parallel DC, \text{مورب } BD) \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{D}_1$

$AB = DC$

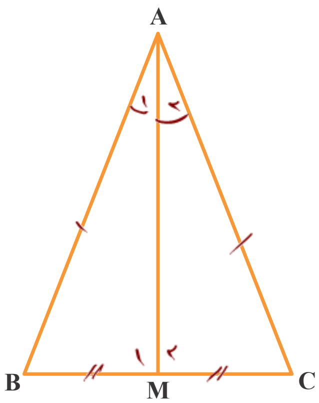
$\Rightarrow \triangle AOB \cong \triangle DOC \Rightarrow \begin{cases} AO = OC \\ BO = DO \end{cases}$

تمرین



۱ــ ثابت کنید قطرهای هر متوازی‌الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند. یعنی در شکل مقابل نشان دهید : OA = OC و OB = OD.

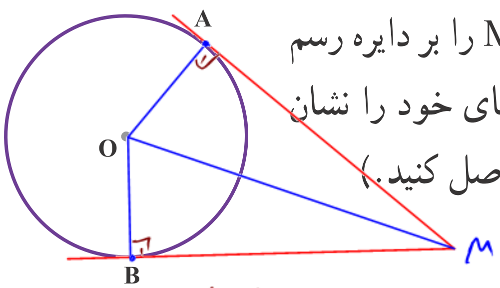
۲ــ ثابت کنید در هر مستطیل، قطرها با یکدیگر برابرند. (مستطیل نوعی متوازی‌الاضلاع است!)



۳ــ در مثلث متساوی‌الساقین ABC، میانهٔ AM را رسم کرده‌ایم. مثلث‌های AMB و AMC به چه حالتی هم‌نهشت‌اند؟ چرا AM نیمساز زاویهٔ $\hat{A}$ است؟ چرا AM بر BC عمود است؟

$\left.\begin{matrix} AB = AC \\ AM = AM \\ BM = MC \end{matrix}\right\} \xRightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle AMB \cong \triangle AMC \Rightarrow \begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \Rightarrow \text{نیمساز } \hat{A} \text{ است } AM \\ \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \Rightarrow \hat{M}_1 + \hat{M}_2 = 180^\circ \text{ چون} \end{cases}$

پس هرکدام 90° هستند.



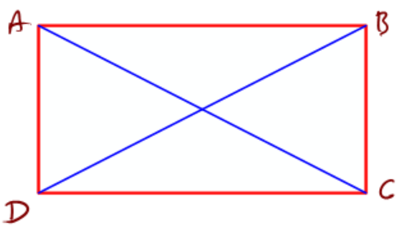
۴ــ از نقطهٔ M خارج از دایره، دو مماسِ MA و MB را بر دایره رسم کنید. آیا اندازهٔ این دو مماس با هم برابر است؟ درستی ادعای خود را نشان دهید. (**راهنمایی** : از مرکز دایره به نقطه‌های M ، A و B وصل کنید.)

از O به A و B و M وصل می‌کنیم

طبق قضیهٔ شعاع و مماس، خط مماس بر شعاع دایره عمود است پس $\hat{A}_1 = \hat{B}_1 = 90^\circ$

$\left.\begin{matrix} \hat{A}_1 = \hat{B}_1 = 90^\circ \\ \text{شعاع } OA = OB \\ \text{ضلع مشترک } OM = OM \end{matrix}\right\} \xRightarrow{\text{وض}} \triangle AOM \cong \triangle BOM \Rightarrow MA = MB$

حل ۲)

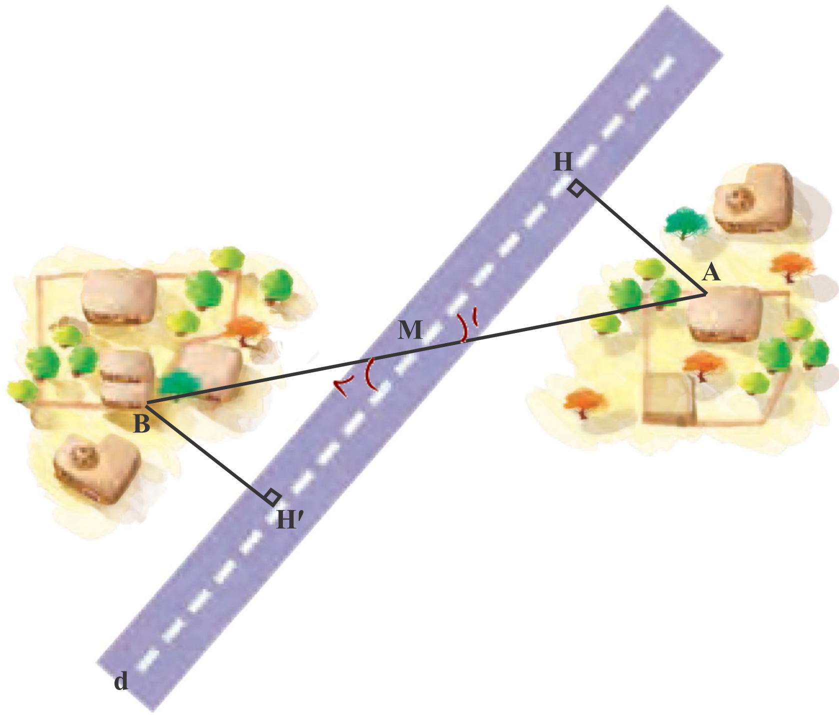


$\left.\begin{matrix} \text{فرض } AD = BC \\ \text{ضلع مشترک } DC = DC \\ \hat{D} = \hat{C} = 90^\circ \end{matrix}\right\} \xRightarrow{\text{ض ز ض}} \triangle ADC \cong \triangle BDC \Rightarrow AC = BD$

درس چهارم: حل مسئله در هندسه

برای حل مسائل هندسی، راه حل کلّی وجود ندارد؛ امّا می‌توان مراحلی را مشخص کرد که برای حل مسئلهٔ هندسه، توصیه می‌شود. این مراحل را در حل یک مثال کاربردی معرفی می‌کنیم.

مثال : دو روستای A و B با یک جادّهٔ خاکی مستقیم به هم وصل هستند. در آن منطقه یک جادّهٔ آسفالتهٔ مستقیم ساخته شد که دو روستا در دو طرف آن واقع شد و جادهٔ آسفالته درست از وسط جادّهٔ خاکی عبور می‌کرد. ادارهٔ راه‌سازی تصمیم گرفته است که از هر روستا، یک جادّهٔ آسفالته با کوتاه‌ترین فاصلهٔ ممکن تا جادّهٔ اصلی بسازد. بنابراین از روستای A یک جادّهٔ مستقیم، عمود بر این جادّهٔ اصلی و به طول چهار کیلومتر ساخته شد. برای برآورد هزینه‌های ساخت جادّهٔ دیگر از روستای B، مهندسان پیش‌بینی کرده‌اند که فاصلهٔ روستای B از جاده نیز همین مقدار است؛ یعنی $AH=BH'$.



قدم‌های حل مسئله

۱ــ صورت مسئله را به‌دقت بخوانید و مفاهیم تشکیل‌دهندهٔ آن را بشناسید. در این مسئله با مفاهیمی همچون خط، پاره خط و فاصلهٔ نقطه تا خط سروکار داریم. آیا با آنها آشنایی دارید؟

۲ــ اگر مسئله فاقد شکل است، با توجه به‌صورت مسئله، یک شکل مناسب برای آن رسم کنید.

در اینجا شکل این مسئله را با توجه به طرح بالا رسم کنید.

۳ـ داده‌های مسئله (فرض) و خواسته‌های آن (حکم) را تشخیص دهید و در یک جدول بنویسید. دراینجا فرض‌های اصلی این است که M وسط AB است؛ یعنی MA=MB است و AH و BH′ بر d عمودند و حکم این است : AH=BH′

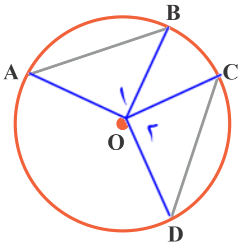
فرض	MA=MB , $\hat{H}=\hat{H'}=۹۰^\circ$
حکم	AH=BH′

۴ـ برای رسیدن از فرض به حکم، راه حلی پیدا کنید. روش‌های مختلفی برای این کار هست که آنها را به مرور می‌آموزید. یکی از راه‌های اثبات برابری دو پاره‌خط، استفاده از مثلث‌های هم‌نهشت است. در این شکل، کدام دو مثلث، برای این منظور مناسب است؟

با توجه به فرض و حکم مسئله، اثبات را با نمادهای ریاضی کامل کنید :

$$\left.\begin{array}{r} MA=MB \text{ (طبق فرض)} \\ \hat{H}=\hat{H'}=۹۰^\circ \\ \hat{M}_۱=\hat{M}_۲ \text{ (}\cancel{\text{متقابل}}\text{ به راس)} \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{یک زاویهٔ حاده)}]{\text{(وتر و}} \overset{\triangle}{MAH} \cong \overset{\triangle}{MBH'} \xrightarrow[\text{متناظر}]{\text{تساوی اجزای}} AH=BH'$$

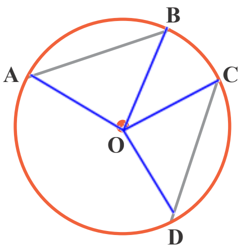
فعالیت



۱ـ در شکل مقابل وترهای AB و CD با هم مساوی‌اند.

نشان دهید کمان‌های $\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{CD}$ مساوی‌اند. از O به A و B و C و D وصل می‌کنیم

$$\left.\begin{array}{l} AO=OC \text{ شعاع} \\ BO=OD \text{ شعاع} \\ AB=CD \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض‌ض‌ض}} \overset{\triangle}{AOB} \cong \overset{\triangle}{COD} \Rightarrow \hat{O}_۱=\hat{O}_۲ \longrightarrow \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$$

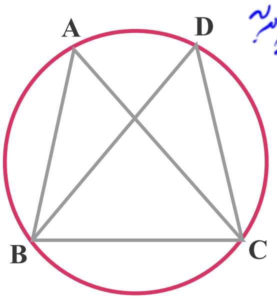


۲ـ در شکل مقابل کمان‌های $\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{CD}$ مساوی‌اند. نشان دهید وترهای AB و CD با هم برابرند.

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD} \Rightarrow \hat{O}_۱=\hat{O}_۲ \\ AO=OC \\ BO=DO \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض‌ز‌ض}} \overset{\triangle}{AOB} \cong \overset{\triangle}{COD} \Rightarrow AB=CD$$

> در یک دایره اگر دو کمان برابر باشند، وترهای نظیر آنها با هم برابرند و اگر دو وتر برابر باشند، کمان‌های نظیر آنها نیز با هم برابرند.

کار در کلاس



در شکل مقابل می‌دانیم AB=CD،

۱ــ چرا $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$ ؟ وقتی در یک دایره، دو وتر برابر باشند کمان‌های نظیر آن‌ها نیز برابرند

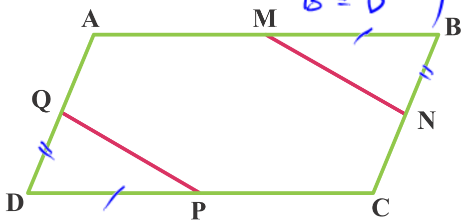
۲ــ جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پرکنید :

$$\begin{cases}\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}\\ \overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{BC}\end{cases}$$
$$\overline{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{BC}}\Rightarrow \overset{\frown}{ABC}=\overset{\frown}{BCD}$$

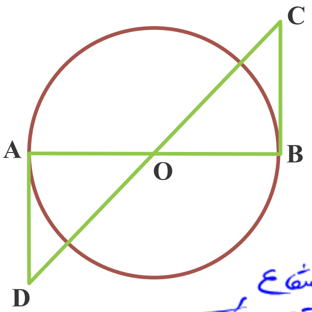
۳ــ چرا AC=BD؟ وقتی در یک دایره، دو کمان برابر باشند وترهای نظیر آن‌ها نیز برابرند

تمرین

$$\left.\begin{array}{l} AB=DC\Rightarrow \frac{AB}{2}=\frac{DC}{2}\Rightarrow MB=DP\\ AD=BC\Rightarrow \frac{AD}{2}=\frac{BC}{2}\Rightarrow DQ=BN\\ \hat{B}=\hat{D}\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{ض ز ض}}\overset{\triangle}{MBN}\cong\overset{\triangle}{DQP}\Rightarrow MN=PQ$$



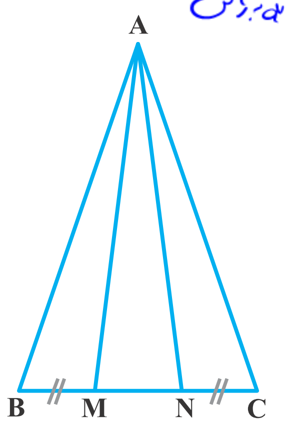
۱ــ در شکل مقابل ABCD متوازی‌الاضلاع است و M و N و P و Q وسط‌های اضلاع متوازی‌الاضلاع‌اند، ثابت کنید : MN=PQ



۲ــ در شکل مقابل O مرکز دایره است و BC و AD بر دایره مماس‌اند، نشان دهید که AD و BC برابرند.

خط‌های ارتفاع عمودند $\hat{A}=\hat{B}=90^\circ$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}=\hat{B}=90^\circ\\ \text{شعاع } OA=OB\\ \text{متقابل به رأس } \hat{O}_1=\hat{O}_2\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{ز ض ز}}\overset{\triangle}{AOD}\cong\overset{\triangle}{COB}\Rightarrow AD=BC$$

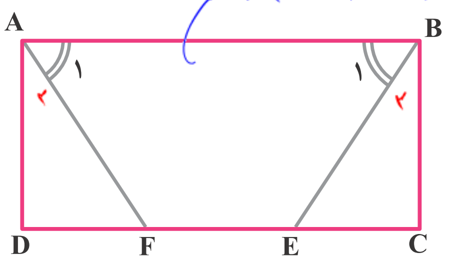


۳ــ در شکل مقابل، مثلث ABC متساوی‌الساقین است و M و N روی قاعدهٔ BC طوری قرار دارند که BM=NC.

نشان دهید مثلث AMN هم متساوی‌الساقین است.

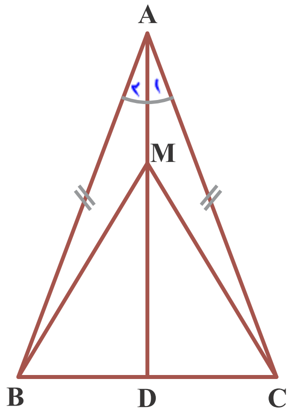
$$\left.\begin{array}{l}\text{فرض } AB=AC\\ BM=NC\\ \hat{B}=\hat{C}\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{ض ز ض}}\overset{\triangle}{ANC}\cong\overset{\triangle}{AMB}\Rightarrow AM=AN$$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}_1+\hat{A}_2=90\\ \hat{B}_1+\hat{B}_2=90\\ \hat{A}_1=\hat{B}_1\end{array}\right\} \Longrightarrow \underline{\hat{A}_2=\hat{B}_2}\ *$$



۴ـ در مستطیل ABCD، پاره‌خط‌های BE و AF طوری رسم شده که دو زاویهٔ A_1 و B_1 برابرند. ثابت کنید BE و AF مساوی‌اند.

$$\left.\begin{array}{l}*\hat{A}_2=\hat{B}_2\\ AD=BC\\ \hat{D}=\hat{C}=90^\circ\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{ز ض ز}} \triangle ADF \cong \triangle BCE \Longrightarrow AF=BE$$



۵ـ نشان دهید در هر مثلث متساوی‌الساقین، فاصلهٔ هر نقطهٔ دلخواه روی نیمساز زاویهٔ رأس از دو سر قاعده، برابر است : MB=MC.

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}_1=\hat{A}_2\\ AM=AM\\ AB=AC\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{ض ز ض}} \triangle AMB \cong \triangle AMC \Longrightarrow \underline{MB=MC}$$

درس پنجم: شکل‌های متشابه

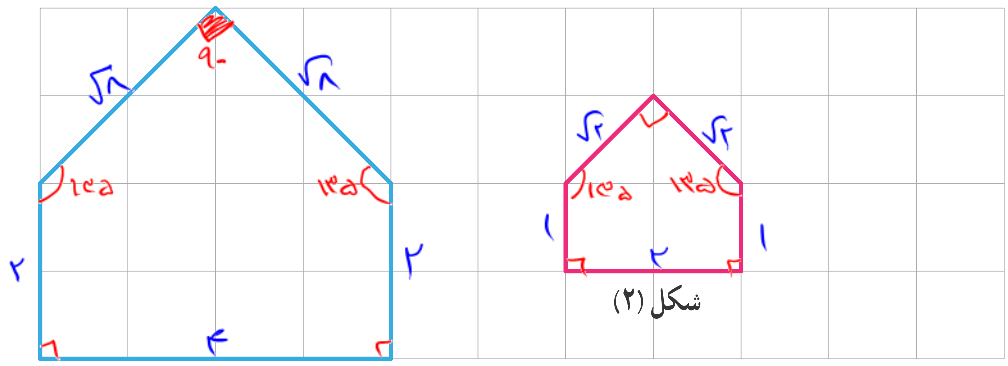
ــ در تصویرهای زیر، دو گل شبیه هم را می‌بینید. آیا هر دو گل به‌طور کامل مثل هم‌اند؟

ــ در تصویرهای زیر دو عکس از یک کودک را می‌بینید. تفاوت این دو تصویر در چیست؟

ــ تصویرهای زیر، عکس‌هایی از میدان آزادی تهران است. کدام‌یک به برج آزادی شبیه‌تر است؟

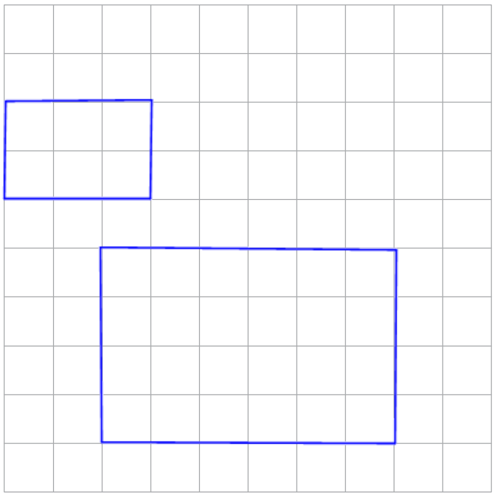
فعالیت

۱ــ مربع‌های صفحهٔ شطرنجی زیر به ضلع یک سانتی‌متر است :



شکل (۲)

شکل (۱)



اندازهٔ ضلع‌ها و زاویه‌های هر دو شکل را بنویسید :

چه رابطه‌ای بین ضلع‌های متناظر دو شکل وجود دارد؟ ← با هم متناسب هستند

چه رابطه‌ای بین زاویه‌های متناظر دو شکل وجود دارد؟ ← با هم برابر هستند

اندازهٔ ضلع‌های شکل (۱) چند برابر اندازهٔ ضلع‌های شکل (۲) است؟ دو برابر

در صفحهٔ شطرنجی مقابل یک چند ضلعی رسم کنید و چند ضلعی دیگری مانند آن بکشید؛ به‌طوری که اندازهٔ ضلع‌هایش ۲ برابر شکل اوّل باشد.

۲ــ در تصویر زیر، نقشهٔ قسمتی از شهر تهران را می‌بینید. مقیاس نقشه ۱ به ۱۰۰,۰۰۰ است؛ یعنی هر یک سانتی‌متر روی نقشه با ۱۰۰,۰۰۰ سانتی‌متر مقدار واقعی برابر است. فاصلهٔ دو میدان انقلاب و آزادی را پیدا کنید.

۷×۱۰۰۰۰۰ = ۷۰۰۰۰۰ cm = ۷ km

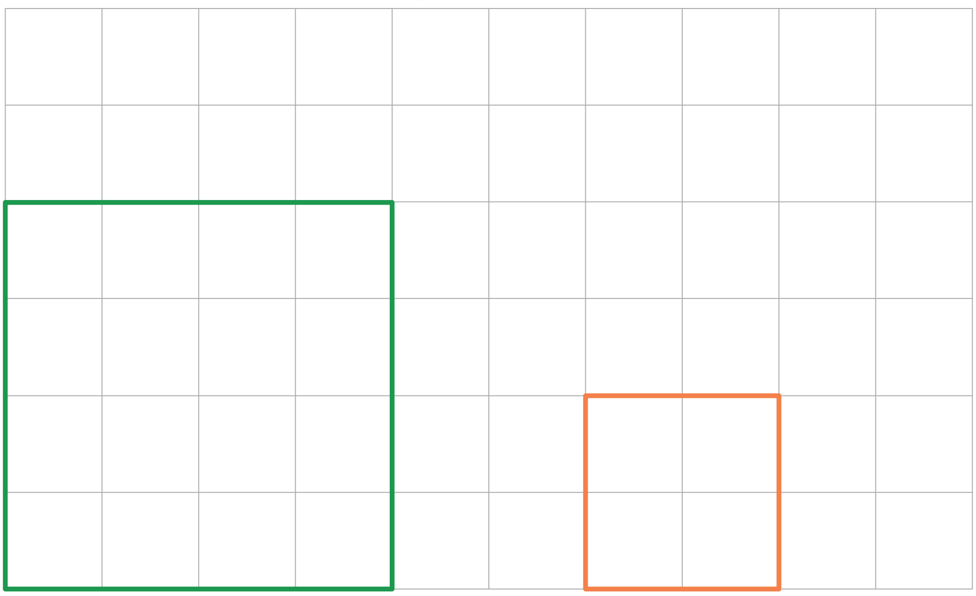
۳ــ شکل زیر را با دستگاه کپی کوچک کرده‌ایم. عدد روی دستگاه ۵۰٪ را نشان می‌داد. تصویر خروجی را شما رسم کنید.

هرگاه در دو چندضلعی همهٔ ضلع‌ها به یک نسبت تغییر کرده باشد (کوچک یا بزرگ شده، یا بدون تغییر باشد) و اندازهٔ زاویه‌ها تغییر نکرده باشد، آن دو چند ضلعی با هم متشابه‌اند.

کار در کلاس

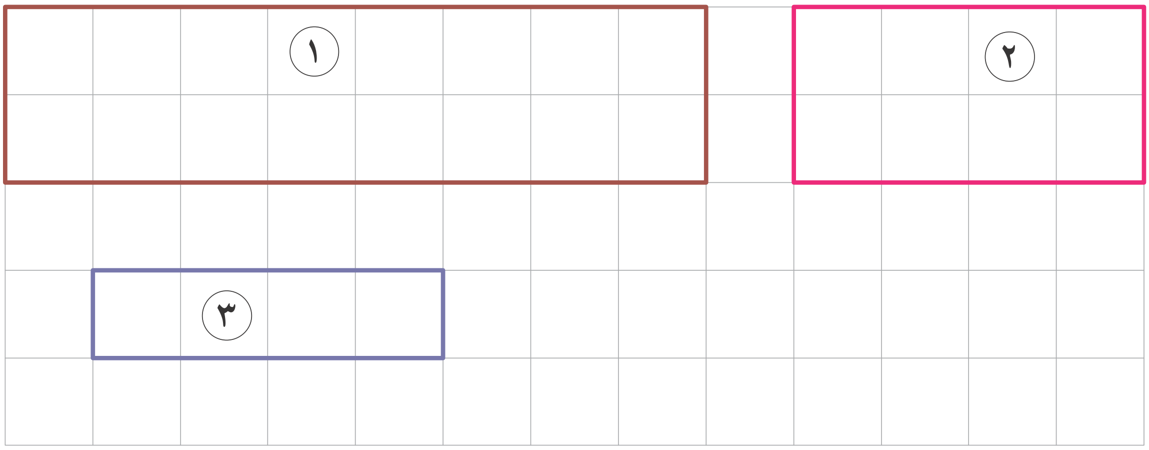
۱ــ آیا دو مربع زیر متشابه‌اند؟ اندازهٔ ضلع‌ها و زاویه‌های هر کدام را بنویسید. چه رابطه‌ای بین ضلع‌ها و زاویه‌های دو شکل وجود دارد؟ ضلع ها باهم متناسب هستند (ضلع مربع بزرگتر دوبرابر ضلع مربع کوچک‌تر است) و زاویه‌ها متناظر باهم برابرند

آیا می‌توان گفت هر دو مربع دلخواه با هم متشابه‌اند؟ بله چرا؟ چون در هر مربع ۴ ضلع باهم برابرند و زاویه‌ها قائمه هستند



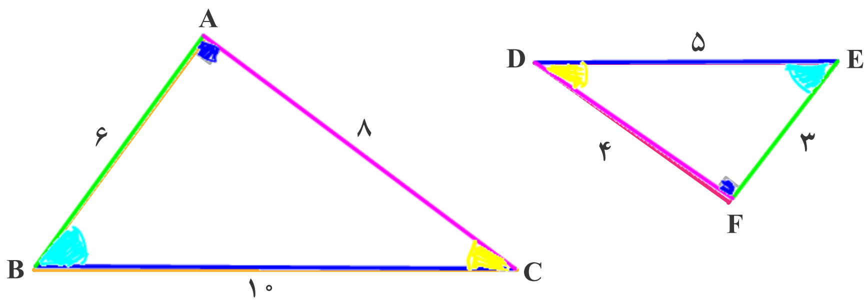
۲ــ از مستطیل‌های زیر کدام با هم متشابه‌اند؟ چرا؟ آری چون اضلاع به یک نسبت تغییر کرده اند. ولی زاویه ها تغییر نکرده اند

آیا هر دو مستطیل دلخواه با هم متشابه‌اند؟ خیر



فعالیت

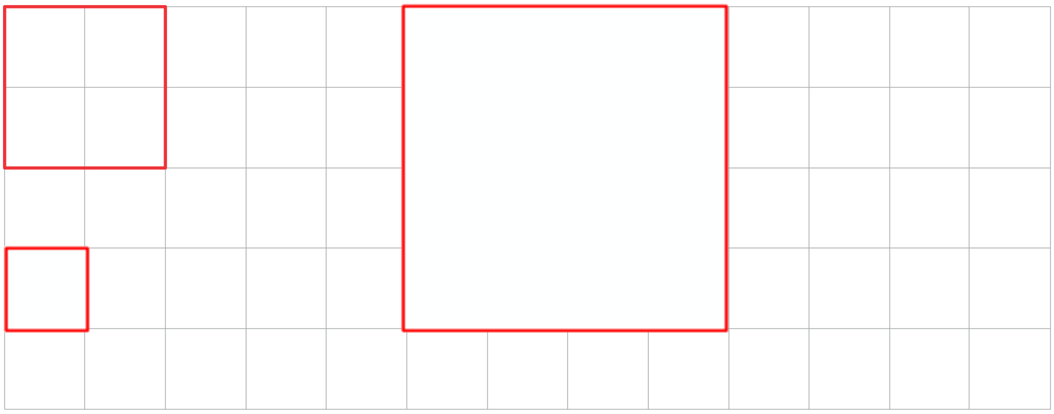
دو مثلث زیر با هم متشابه‌اند. ضلع‌های متناظر و زاویه‌های متناظر را همرنگ کنید. نسبت ضلع‌های متناظر را بنویسید. آیا سه کسر برابر به‌دست آمد؟ بله $\frac{AC}{DF}=2$ $\frac{AB}{EF}=2$ $\frac{BC}{DE}=2$



به نسبت دو ضلع متناظر در دو شکل متشابه، نسبت تشابه می‌گویند.

کار در کلاس

۱ــ با توجه به مربع صفحهٔ بعد، مربع دیگری رسم کنید؛ به‌گونه‌ای که نسبت تشابه دو مربع $\frac{1}{2}$ باشد. این سؤال چند پاسخ دارد؟ چرا؟ دو پاسخ - اگر مربع رسم شده مربع بزرگتر باشد ضلع مربع کوچک نصف آن است و اگر مربع رسم شده مربع کوچکتر باشد هر ضلع مربع بزرگتر دو برابر است

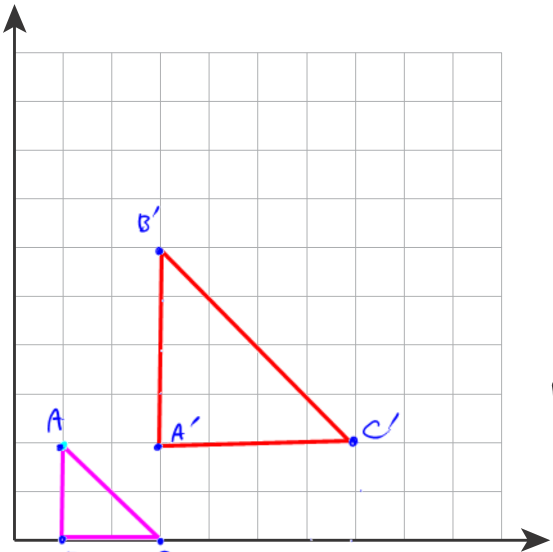


۲ــ در صفحهٔ مختصات، نقاط زیر را پیدا کنید :

مثلث ABC $\quad C=\begin{bmatrix}۳\\۰\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}۱\\۰\end{bmatrix} \quad A=\begin{bmatrix}۱\\۲\end{bmatrix}$

مثلث A′B′C′ $\quad C'=\begin{bmatrix}۷\\۲\end{bmatrix} \quad B'=\begin{bmatrix}۳\\۶\end{bmatrix} \quad A'=\begin{bmatrix}۳\\۲\end{bmatrix}$

طول ضلع‌های دو مثلث را بنویسید و تشابه آنها را بررسی کنید، در صورت متشابه بودن، نسبت تشابه را پیدا کنید.



$AB=۲ \,,\, BC=۲ \,,\, AC=\sqrt{۸}$

$A'B'=۴ \,,\, A'C'=۴ \,,\, B'C'=\sqrt{۳۲}$

نسبت تشابه = ۲ یا $\frac{۱}{۲}$

تمرین

۱ــ آیا هر دو شکل هم‌نهشت با هم، متشابه نیز هستند؟ بله

در صورت متشابه بودن نسبت تشابه چند است؟ یک

۲ــ آیا هر دو لوزی متشابه‌اند؟ چرا؟ خیر ــ زیرا در هر لوزی‌ها زاویه‌ها با هم برابر نیستند

۳ــ در یک نقشه، مقیاس ۲۰۰ : ۱ است. فاصلهٔ دو نقطه روی نقشه ۳/۵ سانتی‌متر است. فاصلهٔ این دو نقطه در اندازهٔ واقعی چقدر است؟

$۳/۵ \times ۲۰۰ = ۷۰۰\ cm$

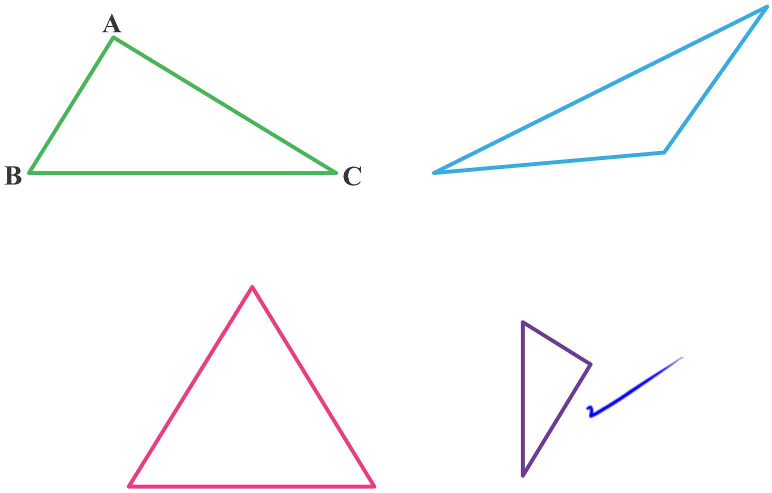
۴ــ آیا هر دو مثلث متساوی‌الاضلاع متشابه‌اند؟ چرا؟ بله ــ زیرا در هر مثلث متساوی‌الاضلاع ضلع‌ها با هم متناسب و زاویه‌ها با هم برابرند

۵ــ آیا هر دو مثلث متساوی‌الساقین متشابه‌اند؟ چرا؟ خیر ــ در هر مثلث متساوی‌الساقین ها زاویه‌ها یکی نیستند

۶ــ مثلث ABC به ضلع‌های ۴ و ۵ و ۸ با مثلث DEF به ضلع x−۱ و ۱۰ و x+۷ با هم متشابه‌اند (اندازهٔ ضلع‌های مثلث‌ها، از کوچک به بزرگ نوشته شده است) مقدار x را پیدا کنید.

$$\frac{x-1}{4} = \overset{2}{\frac{10}{5}} = \frac{x+7}{8} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x-1}{4}=2 \Rightarrow x-1=8 \Rightarrow \boxed{x=9} \\ \frac{x+7}{8}=2 \Rightarrow x+7=16 \Rightarrow \boxed{x=9} \end{cases}$$

۷ــ کدام مثلث با مثلث ABC متشابه است؟

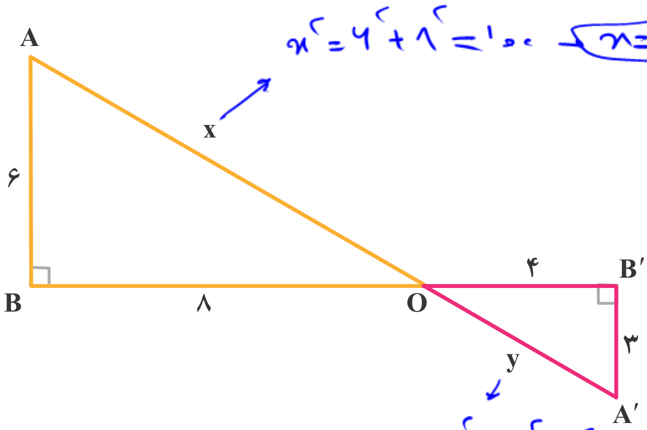


۸ــ در شکل زیر

الف) مقادیر x و y را بیابید (به کمک قضیهٔ فیثاغورس)

ب) آیا دو مثلث ABO و A'B'O متشابه‌اند؟ چرا؟ بله - چون سه ضلع به هم متناسب و زاویه‌ها نظیر به نظیر با هم برابرند

$x^2=6^2+8^2=100 \to \boxed{x=10}$



$y^2=3^2+4^2=25 \to y=5$

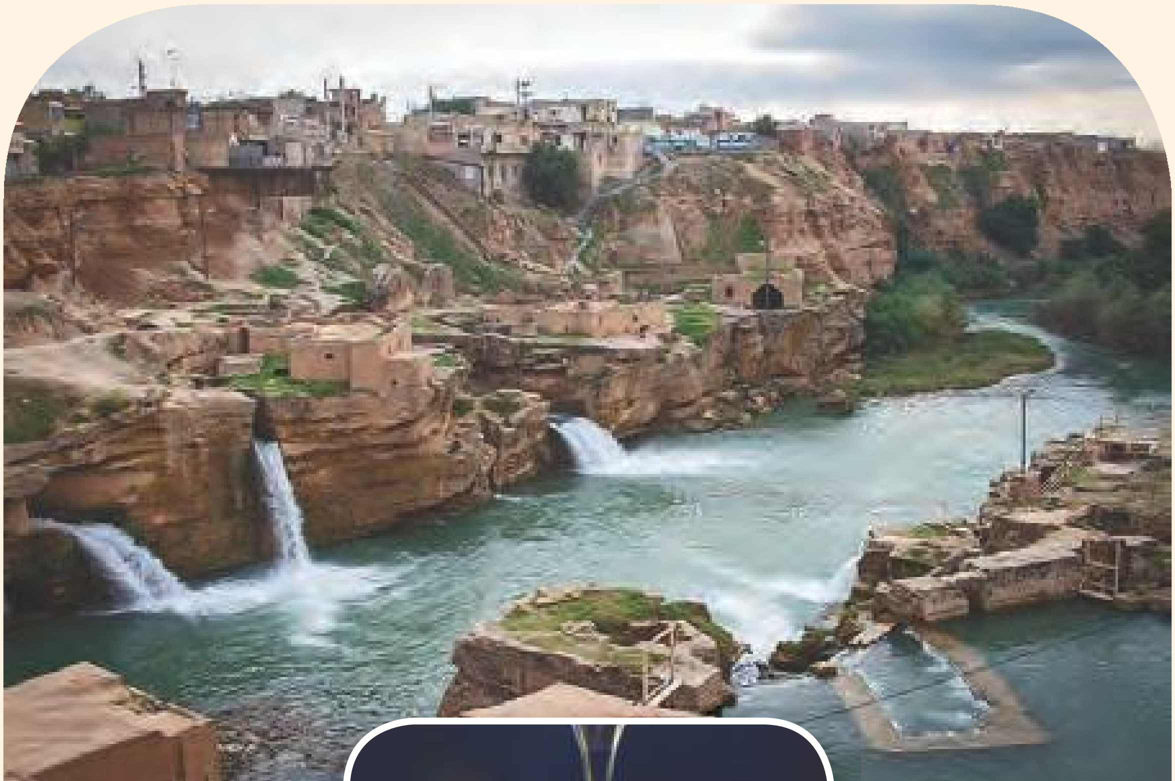
فصل ۴

توان و ریشه

وَ جَعَلنا مِنَ الماءِ کُلَّ شَیءٍ حَیّ

هر چیز زنده‌ای را از آب پدید آوردیم

(سورهٔ انبیا، آیهٔ ۳۰)



یک قطره آب شامل حدود ۳۳ میلیارد میلیارد مولکول یا به عبارت دیگر ۳۳,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰ مولکول است که می‌توان آن را به صورت $۳/۳ \times ۱۰^{۱۹}$ نمایش داد. هرگونه حیاتی به آب نیاز دارد. قدر این نعمت الهی را بدانیم.

درس اوّل: توان صحیح

در سال‌های گذشته با توان‌های طبیعی یک عدد آشنا شده‌اید؛ به‌طور مثال می‌دانید :

$$\frac{-۱}{۳۲}=\left(\frac{-۱}{۲}\right)^{۵} \quad و \quad \frac{۸۱}{۲۵۶}=\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۴} \quad و \quad (-۵)^{۲}=۲۵ \quad و \quad ۲^{۳}=۸$$

همچنین می‌دانید که اگر a عددی غیرصفر باشد، $a^{۰}=۱$.

آیا توان منفی یک عدد (ناصفر) هم معنی دارد؟ مثلاً حاصل $۲^{-۳}$ چیست؟ به کمک فعالیت زیر پاسخ این سؤال را می‌توان پیدا کرد :

فعالیت

جدول زیر را درنظر بگیرید و به سؤالات پاسخ دهید :

۱۶	۸	۴	۲	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۲^{۲}}$	$\frac{۱}{۸}=\frac{۱}{۲^{۳}}$	$\frac{۱}{۱۶}=\frac{۱}{\quad}$	$\frac{۱}{۳۲}=\frac{۱}{\quad}$
	$۲^{۳}$	$۲^{۲}$	$۲^{۱}$	$۲^{۰}$	$۲^{\bigcirc}$	$۲^{\bigcirc}$	$۲^{\bigcirc}$	$۲^{\bigcirc}$	$۲^{\bigcirc}$

الف) عددهای سطر اوّل جدول با هم چه ارتباطی دارند؟

ب) هر یک از عددهای سطر دوم چه رابطه‌ای با عدد بالای آن دارد؟

ج) توان‌های عددهای سطر دوم تا $۲^{۰}$ با یکدیگر چه رابطه‌ای دارد؟

د) این الگو را ادامه دهید و در جاهای خالی عددهای مناسب بنویسید.

هـ) به کمک جدول، تساوی‌های زیر را کامل کنید :

$۲^{-۵}=$ $\qquad$ $۲^{-۴}=$ $\qquad$ $۲^{-۳}=$

به‌طور کلی اگر a یک عدد غیرصفر باشد و n یک عدد طبیعی باشد، آن‌گاه :

$$a^{-n}=\frac{۱}{a^{n}} \qquad a\neq ۰ \quad , \quad n\in\mathbb{N}$$

مثال :

الف) $۷^{-۲}=\frac{۱}{۷^{۲}}=\frac{۱}{۴۹}$

ب) $\left(\frac{۱}{۵}\right)^{-۲}=\frac{۱}{\left(\frac{۱}{۵}\right)^{۲}}=\frac{۱}{\frac{۱}{۲۵}}=۲۵$

ج) $\left(\frac{۲}{۳}\right)^{-۴}=\frac{۱}{\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۴}}=\frac{۱}{\frac{۱۶}{۸۱}}=\frac{۸۱}{۱۶}$

د) $(-۲)^{-۳}=\frac{۱}{(-۲)^{۳}}=-\frac{۱}{۸}$