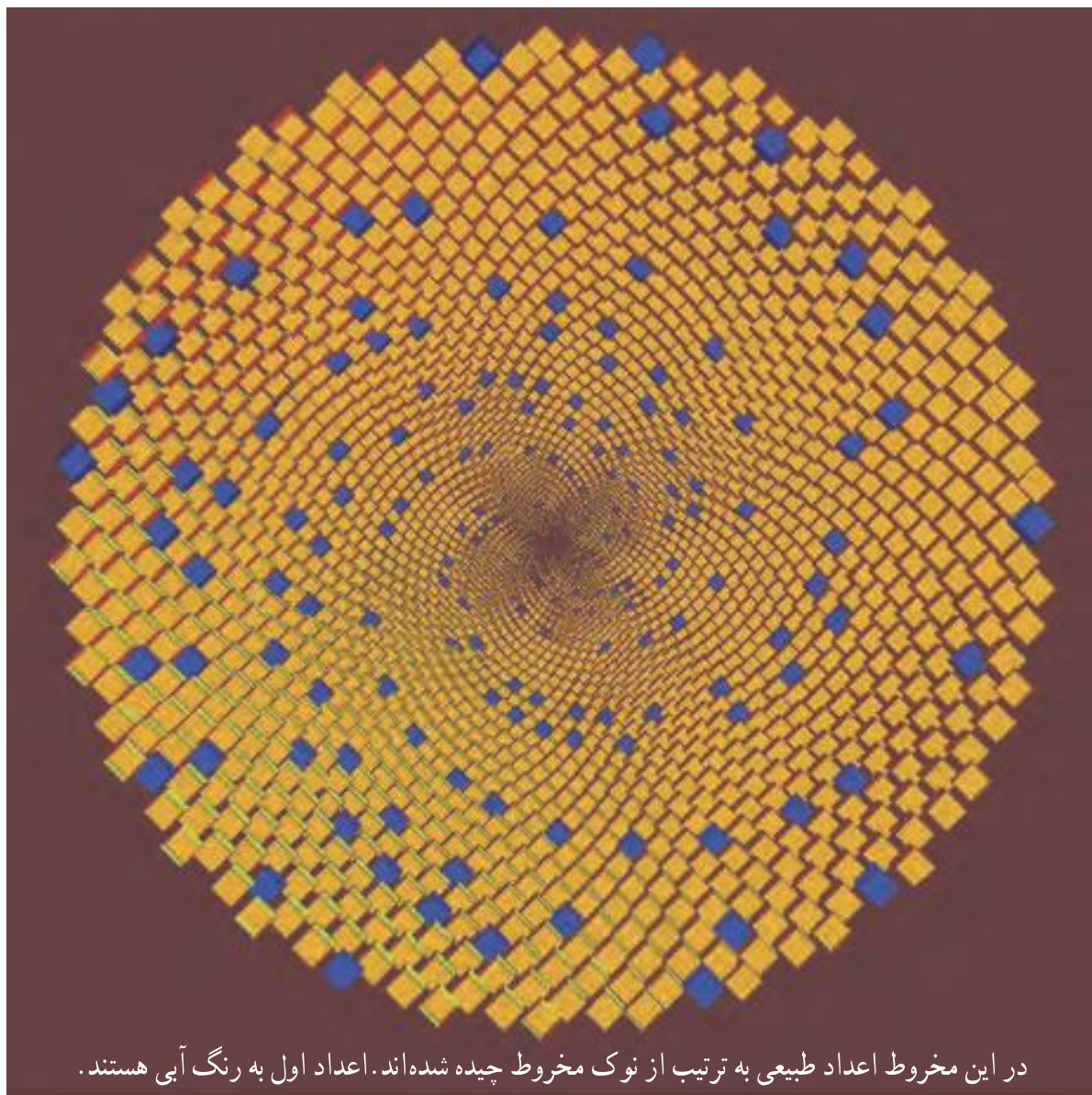




۲

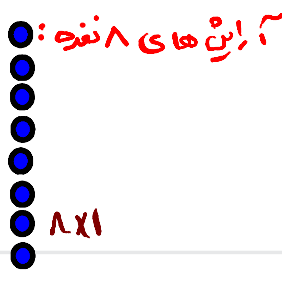
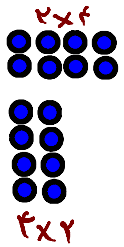
## فصل

# عددهای اول



در این مخروط اعداد طبیعی به ترتیب از نوک مخروط چیده شده‌اند. اعداد اول به رنگ آبی هستند.

شمارنده‌های اول یک عدد مانند ماده اولیه کارخانه عدس‌سازی هستند. همه عددهای طبیعی بزرگ‌تر از یک و غیر اول را می‌توانیم با ضرب شمارنده‌های اول به دست آوریم. امروزه از عددهای اول، که تجزیه و شکسته نمی‌شوند برای رمزگذاری و رمزگشایی استفاده می‌شود.



## یادآوری عددهای اول

### فعالیت



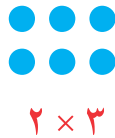
۱- می‌خواهیم ۱۹ نفر از دانش‌آموزان را برای کارهای مختلف به گروه‌هایی

تقسیم کنیم. آیا می‌توانیم این تعداد را به گروه‌های مساوی تقسیم کنیم؟ **۱۹ گروه یک نفره یا یک گروه ۱۹ نفره**  
 اگر تعداد دانش‌آموزان ۷ نفر باشد، چه گروه‌هایی را می‌توانیم تشکیل دهیم؟ همه حالت‌های ممکن را بنویسید. **۷ گروه یک نفره یا یک گروه ۷ نفره**

اگر تعداد آنها ۱۵ نفر باشد، چه گروه‌هایی را می‌توانیم تشکیل دهیم؟ **۱۵ گروه یک نفره ، ۵ گروه ۳ نفره ، ۳ گروه ۵ نفره ، یک گروه ۱۵ نفره**



۲- تعدادی از سربازان می‌خواهند رژه بروند. فرمانده آنها آرایش‌های مستطیلی مختلف برای گروه‌های ۶ نفره را روی کاغذ کشیده است.



شما هم برای ۸ نفر، آرایش‌های مستطیلی مختلف رسم کنید.

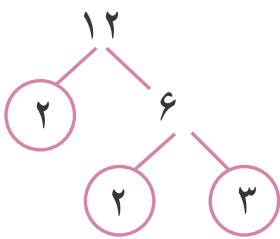
برای ۵ نفر هم آرایش‌های ممکن را رسم کنید.  $1 \times 5$



**اعداد اول**

۳- مانند نمونه‌ها با رسم نمودارهای درختی، عددهای داده شده را به صورت ضرب شمارنده‌های

اول بنویسید (تجزیه کنید).



$12 = 2 \times 2 \times 3$



هر عدد طبیعی و بزرگ‌تر از یک، که هیچ شمارنده طبیعی به جز یک و خودش نداشته باشد، عدد اول نامیده می‌شود.

## کار در کلاس



اگر بتوانیم عددی طبیعی را به صورت ضرب دو عدد طبیعی بزرگ‌تر از یک بنویسیم، عدد مورد نظر، اول نخواهد بود و به چنین عددی، **عدد مرکب** می‌گویند؛ برای مثال؛ ۲۴ عددی مرکب است؛ چون:  $۲۴ = ۶ \times ۴$

همهٔ عددهای مرکب بین ۱۵ و ۳۰ را به صورت ضرب دو عدد طبیعی بزرگ‌تر از یک بنویسید.

$$۱۶ = ۲ \times ۸ \quad ۱۸ = ۲ \times ۹ \quad ۲۰ = ۴ \times ۵ \quad ۲۱ = ۳ \times ۷ \quad ۲۲ = ۲ \times ۱۱$$

$$۲۴ = ۴ \times ۶ \quad ۲۵ = ۵ \times ۵ \quad ۲۶ = ۲ \times ۱۳ \quad ۲۷ = ۳ \times ۹ \quad ۲۸ = ۲ \times ۱۴$$

### فعالیت

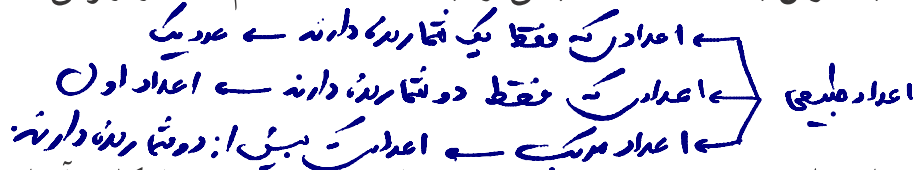


۱- عددهای طبیعی از ۱ تا ۲۰ را بنویسید و دور عددهای اول خط بکشید. آیا

عدد ۱ اول است؟ چرا؟ **خیر- چون فقط یک شمارنده دارد.**

آیا عدد ۱ مرکب است؟ چرا؟ **خیر- چون نمی‌توانیم آن را به دو عدد طبیعی بزرگ‌تر از یک تجزیه و فقط یک شمارنده دارد.**

۲- با توجه به سؤال بالا، عددهای طبیعی را به سه دسته تقسیم کنید و ویژگی‌های هر کدام را بنویسید.



۳- مضرب‌های طبیعی عدد ۲ در زیر نوشته شده است. در صورت امکان، آنها را مانند نمونه به صورت ضرب دو عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ بنویسید.

$$۲, ۴, ۶, ۸, ۱۰, ۱۲, ۱۴, \dots$$

$$\begin{array}{ccccccc} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ ۲ \times ۲ & & ۲ \times ۳ & & ۲ \times ۴ & ۲ \times ۵ & ۲ \times ۶ & ۲ \times ۷ \end{array}$$

به همین ترتیب، مضرب‌های طبیعی عددهای ۳ و ۴ را بنویسید و در صورت امکان آنها را به صورت

ضرب دو عدد طبیعی و بزرگ‌تر از ۱ بنویسید.

$$۳: ۳, ۶, ۹, ۱۲, ۱۵, \dots$$

$$\begin{array}{ccccccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ ۳ \times ۳ & ۳ \times ۲ & ۳ \times ۳ & ۳ \times ۴ & ۳ \times ۵ & ۳ \times ۶ & ۳ \times ۷ \end{array}$$

۴- با توجه به سؤال بالا، آیا می‌توانیم بگوییم که همهٔ مضرب‌های یک عدد طبیعی مرکب‌اند؟ چرا؟ **خیر**

اگر عدد مورد نظر اول باشد، همهٔ مضرب آن‌ها همان خود آن عدد است. ولی اگر عدد مرکب باشد، عدد ۱ نه اول است نه مرکب؛ به این ترتیب، عددهای طبیعی را می‌توان به سه بخش تقسیم کرد:

عددهای اول، عددهای مرکب و عدد یک

مضرب‌های آن  
مرکب هستند

## کار در کلاس



۱- در بین اعداد زیر، اعداد مرکب را مشخص کنید.

۲۱   ۳۱   ۳۵   ۴۷   ۴۹

۲- کدام عددهای طبیعی را می‌شناسید که همهٔ مضرب‌هایشان عددهای مرکب باشند؟ **اعداد مرکب**

۳- عدد ۱۷ چند مضرب دارد؟ **بی‌شمار** چند تا از مضرب‌های آن عدد اول هستند؟ **فقط یکی**

۴- اگر  $a$  یک عدد اول باشد، آیا همهٔ مضرب‌هایش مرکب‌اند؟ **خیر**



## فعالیت

۱- ب.م.م جفت عددهای داده شده را بنویسید.

$(15, 6) = 3$	$(2, 8) = 2$	$(3, 9) = 3$	$(1, 4) = 1$
$(18, 12) = 6$	$(5, 12) = 1$	$(15, 4) = 1$	$(3, 5) = 1$
$(24, 25) = 1$	$(18, 25) = 1$	$(7, 8) = 1$	$(3, 3) = 3$

اگر ب.م.م (بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه [شمارنده] مشترک) دو عدد برابر یک باشد، می‌گوییم آن دو عدد **نسبت به هم اول** هستند؛ برای مثال، عددهای ۸ و ۹ هر دو مرکب‌اند اما چون  $(8, 9) = 1$  می‌گوییم این دو عدد نسبت به هم اول‌اند.

۲- دو عدد اول متفاوت انتخاب کنید و ب.م.م آنها را بنویسید.  $(3, 7) = 1$

آیا می‌توان گفت هر دو عدد اول نسبت به هم اول‌اند؟ چرا؟ **خیر** - اگر دو عدد اول متفاوت باشند **نسبت به هم اول هستند و نه اگر دو عدد اول برابر باشند ب.م.م آن‌ها می‌شود خودش**.

۳- یک عدد اول و یک عدد مرکب مثال بزنید که نسبت به هم اول باشند.  **$(5, 12) = 1$**

۴- دو عدد مرکب مثال بزنید که نسبت به هم اول باشند.  **$(25, 27) = 1$**

۵- آیا دو عدد طبیعی متوالی نسبت به هم اول می‌شوند؟ **بله**

۶- اگر دو عدد نسبت به هم اول باشند، ک.م.م آنها چگونه به دست می‌آید؟ **حاصل ضرب آن‌هاست**

## تمرین



۱- برای تساوی روبه‌رو، چهار پاسخ مختلف به دست آورید.  $(\square \text{ و } 4) = 1$   
**در هر عدد فردی می‌توانیم قرار دهیم. به عنوان مثال: ۱، ۳، ۵، ۷، ...**

۲- عددهای اول بین دو عدد ۴۰ و ۶۰ را بنویسید.  $41, 43, 47, 53, 59$

۳- تعداد عددهای اول کمتر از ۲۰، هشت عدد است، تعداد عددهای مرکب کوچک‌تر از ۲۰ **چندتاست؟ چرا؟**  $\leftarrow 11$  **آنا**  
 (چون گفته کوچکیه از ما پس خود ۲۰ را نباید حساب کنیم)  
 $10 = 1 + 9 = 2 + 8 = 3 + 7 = 4 + 6$   
 عددی اول

۴- آیا جمله زیر درست است؟ چرا؟ **خند** چون عدد یک هیچ شمارنده اولی ندارد  
 «هر عدد طبیعی دست کم ۲ شمارنده دارد.»

۵- مجموع دو عدد اول ۹۹ است. آن دو عدد را مشخص کنید و توضیح دهید که چگونه آنها را پیدا کردید. **عدد ۹۹ فرد است و مجموع یک عدد فرد و یک عدد زوج می‌تواند فرد باشد. تنها عدد اول زوج عدد ۲ است**

بین آن دو عدد عبارتند از  $(2 \text{ و } 97)$   
 ۶- پنج عدد بنویسید که غیر از ۲ و ۳ شمارنده اول دیگری نداشته باشند.  
 $2 \times 2 = 4$  و  $2 \times 3 = 6$  و  $2 \times 5 = 10$  و  $2 \times 7 = 14$  و  $2 \times 11 = 22$  و  $2 \times 13 = 26$   
 ۷- عددی در نظر بگیرید که ۴ و ۹ دو شمارنده آن باشند. حال شش عدد دیگر پیدا کنید که

شمارنده‌های عدد مورد نظر باشند. چون  $36 = (4, 9)$  پس آن عدد حداقل می‌تواند  $36$  باشد. اگر عدد  $36$  را در نظر بگیریم:

$1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36$

## خواندنی

دو عدد اول که با هم دو واحد اختلاف دارند را یک جفت عدد اول **دوقلو** می‌نامند، مانند (۳، ۵)

یا (۱۱، ۱۳) یا (۱۰۱، ۱۰۳). ریاضیدانان بر این باورند (حدس می‌زنند) که برای دوقلوهای اول

پایانی وجود ندارد.

همچنین هر سه عدد فرد و متوالی را، که هر سه اول نیز باشند، اعداد اول سه قلو می‌نامند که فقط

یک سه قلو اول در بین اعداد طبیعی وجود دارد؛ یعنی (۳، ۵، ۷) و سه قلو دیگری یافت

نمی‌شود! چرا؟



می خواهیم عددهای اول از ۱ تا ۵۰ را تعیین کنیم.  
ابتدا عددهای ۱ تا ۵۰ را می نویسیم.

<del>۱</del>	<del>۲</del>	<del>۳</del>	<del>۴</del>	<del>۵</del>	<del>۶</del>	<del>۷</del>	<del>۸</del>	<del>۹</del>	<del>۱۰</del>
<del>۱۱</del>	<del>۱۲</del>	<del>۱۳</del>	<del>۱۴</del>	<del>۱۵</del>	<del>۱۶</del>	<del>۱۷</del>	<del>۱۸</del>	<del>۱۹</del>	<del>۲۰</del>
<del>۲۱</del>	<del>۲۲</del>	<del>۲۳</del>	<del>۲۴</del>	<del>۲۵</del>	<del>۲۶</del>	<del>۲۷</del>	<del>۲۸</del>	<del>۲۹</del>	<del>۳۰</del>
<del>۳۱</del>	<del>۳۲</del>	<del>۳۳</del>	<del>۳۴</del>	<del>۳۵</del>	<del>۳۶</del>	<del>۳۷</del>	<del>۳۸</del>	<del>۳۹</del>	<del>۴۰</del>
<del>۴۱</del>	<del>۴۲</del>	<del>۴۳</del>	<del>۴۴</del>	<del>۴۵</del>	<del>۴۶</del>	<del>۴۷</del>	<del>۴۸</del>	<del>۴۹</del>	<del>۵۰</del>

حالا عددهای غیر اول را خط می زنیم تا عددهای اول باقی بمانند.

۱- آیا عدد ۱ را خط زدید؟ **بله** چرا؟ **چون نه اول است و نه مرکب**

۲- آیا مضرب های عدد ۲ را خط می زنید؟ **بجز خودش** چرا؟ **چون هگی بجز ۲، مرکب هستند**

- مضرب های مرکب عدد ۲ را به صورت / خط بزنید.

- مضرب های مرکب عدد ۳ را خط بزنید.

۳- آیا لازم است مضرب های عدد ۴ را خط بزنیم؟ **خیر** چرا؟ **زیرا اگر عددی مضرب ۴ باشد، پیش**

**از آن به عنوان مضرب ۲ خط خورده است.**

۴- آیا مضرب های عدد ۵ را خط می زنید؟ **بجز خودش** چرا؟ **چون هگی بجز خودش مرکب هستند**

مضرب های مرکب عدد ۵ را خط بزنید. کوچک ترین مضرب عدد ۵، که برای اولین بار خط می خورد،

کدام است؟ **۲۵**

۵- آیا مضرب های عدد ۶ را خط می زنید؟ **خیر** چرا؟ **چون هر عددی مضرب ۶ غیر از خودش**

**قبل از آن مضرب های ۲ و ۳ خط خورده است.**

۶- آیا مضرب های عدد ۷ را خط می زنید؟ **بله** چرا؟ **چون هم مرکب هستند**

**(بجز خودش)**

۷- مضرب های مرکب عدد ۷ را خط بزنید. کوچک ترین مضرب عدد ۷، که برای اولین بار خط

می خورد، کدام است؟ **۴۹**

۸- آیا مضرب های اعداد ۸ و ۹ و ۱۰ را خط می زنید؟ **خیر** چرا؟ **چون هم مضرب های این**

**اعداد قبل از خط خوردن اند**

۹- اگر بخواهیم مضرب‌های عدد ۱۱ را خط بزنیم، کدام مضرب ۱۱ برای اولین بار خط خواهد خورد؟ **۱۲۱**

۱۰- به این ترتیب، آیا لازم است مضرب‌های عدد ۱۱ را خط بزنیم؟ **خیر**

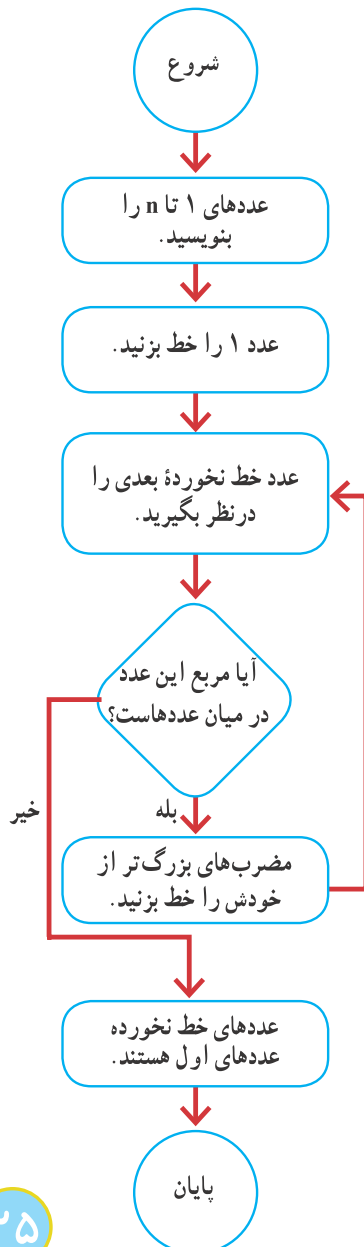
۱۱- آیا عددهای باقیمانده، اول هستند؟ **بله**

برای تعیین عددهای اول، عدد یک و مضرب‌های مرکب اعداد اول را خط می‌زنیم و خط‌زدن را تا عدد اولی ادامه می‌دهیم که مربع آن، بین عددهای نوشته شده نباشد.

## کار در کلاس



نتایج فعالیت قبل، که به آن **روش غربال** می‌گویند در نمودار زیر خلاصه شده است.



این نمودار را برای  $n = 40$  دنبال کنید و همهٔ مرحله‌ها را یک به یک به انجام دهید. هر مرحله از نمودار را برای خود توضیح دهید؛ برای مثال، جملهٔ «عددهای ۱ تا  $n$  را بنویسید» را بخوانید و عددهای ۱ تا ۴۰ را در کادر زیر بنویسید. عدد ۱ را خط بزنید. عدد خط‌نخوردهٔ بعدی را، که عدد ۲ است در نظر بگیرید. آیا مربع عدد ۲ بین عددها هست؟ مضرب‌های مرکب آن را خط بزنید. دوباره به مرحلهٔ قبلی برگردید و به همین ترتیب کار را ادامه دهید.

---

---

---

---

---

---

---

---



می خواهیم مشخص کنیم ۴۷ اول است یا نه. مانند روش غربال، که در صفحه قبل توضیح داده شد، فرض کنید عددهای ۱ تا ۴۷ نوشته شده اند.

آیا عدد ۴۷ با مضرب های ۲ خط می خورد؟ **خیر** با انجام دادن چه عملی می توانید به این سؤال پاسخ دهید؟ **تقسیم**

آیا عدد ۴۷ با مضرب های ۳ خط می خورد؟ **خیر** چرا؟ **۴۷ بر ۳ بخش پذیر نیست**

آیا عدد ۴۷ با مضرب های ۵ خط می خورد؟ **خیر** چرا؟ **۴۷ بر ۵ بخش پذیر نیست**

آیا لازم است بررسی کنیم که عدد ۴۷ با مضرب های ۷ خط می خورد یا نه؟ **خیر** چرا؟ **چون ۴۷ < ۷²**

آیا می توانیم نتیجه بگیریم که عدد ۴۷ را فقط بر عددهای اول تقسیم می کنیم؟ **بله** چرا؟ **چون در غربال**

**فقط مضرب های اعداد اول را خط می زنیم**

چرا تقسیم کردن را تا عدد اولی که مربع آن از ۴۷ بزرگ تر شود ادامه می دهیم؟ توضیح دهید.

**در غربال اعداد، در مرحله حذف مضرب های هر عدد، اولین عددی که خط می خورد مربع آن عدد است، چون قبل از مربع آن عدد، تمام مضرب های آن خط خورده اند.**

**کار در کلاس**



مانند نمونه، بررسی کنید که عددهای داده شده (۹۷، ۱۳۱ و ۱۴۳) اول یا مرکب هستند.

پس باید آن را به عددهای اول ۲، ۳، ۵ و ۷ تقسیم کنیم.  $\sqrt{97} \approx 9 \rightarrow$

$$\begin{array}{r}
 97 \\
 \hline
 2 \\
 \hline
 1
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 97 \\
 \hline
 3 \\
 32 \\
 \hline
 1
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 97 \\
 \hline
 5 \\
 19 \\
 95 \\
 \hline
 2
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 97 \\
 \hline
 7 \\
 13 \\
 91 \\
 \hline
 6
 \end{array}$$

چون تمام تقسیم ها باقی مانده دارند، ۹۷ مضرب هیچ کدام نیست؛ یعنی عددی اول است.

پس باید آن را به عددهای اول ۲، ۳، ۵ و ۷ تقسیم کنیم.  $\sqrt{131} \approx 11 \rightarrow$

چون ۱۳۱ به هیچ کدام از اعداد اول ۲، ۳، ۵ و ۷ بخش پذیر نیست پس اول است.

پس باید آن را به عددهای اول ۲، ۳، ۵ و ۷ تقسیم کنیم.  $\sqrt{143} \approx 11 \rightarrow$

عدد ۱۴۳ مرکب است چون بر ۱۱ بخش پذیر است.  $143 = 11 \times 13$



$$\sqrt{143} = \text{—————} \rightarrow$$



۱- از روش غربال برای عددهای ۱ تا ۶۰ استفاده و عددهای اول کمتر از ۶۰ را پیدا کنید.

۲- مشخص کنید که عددهای ۱۰۷ و ۲۵۱ اول یا مرکب. *هر دو اول هستند.*

۳- «برای اینکه بفهمیم عددهای کمتر از ۱۰۰ اول اند یا نه، کافی است آنها را به عددهای ۲، ۳، ۵ و ۷ تقسیم کنیم.»

آیا این جمله درست است؟ چرا؟ *بله - زیرا بزرگترین عدد اول که از ۱۰۰ کوچکتر است ۷۱ است.*

۴- عددی از ۱۲۰ کوچکتر و از ۱۰۰ بزرگتر است. برای اینکه بفهمیم این عدد اول است یا نه،

حداکثر چند تقسیم انجام می‌دهیم؟ چرا؟ *حداکثر ۴ تقسیم - چون اعداد اول کوچکتر از ۱۰۰ عبارتند از: ۲، ۳، ۵ و ۷.*

۵- عددهای ۱ تا ۱۰۰ را بنویسید و غربال کنید؛ سپس به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

• اولین عددی که خط خورد. *عدد ۱*

• در مرحله حذف مضرب‌های ۷، اولین مضرب ۷ که به عنوان مضرب‌های سایر عددها خط نخورد. *۴۹*

• عددی که با مضرب‌های آن عدد ۲۴ خط خورد. *عدد ۲*

• تمام مضرب‌های ۵ که در مرحله حذف مضرب‌های ۵ برای اولین بار خط خوردند.

*۲۵، ۳۵، ۵۵، ۷۵، ۹۵، ۱۵، ۴۵*

### خواندنی

توزیع و نوع قرار گرفتن اعداد اول بین اعداد طبیعی بسیار نامنظم است و از قانون خاصی پیروی نمی‌کند ولی همین اعداد اول که به صورتی نامنظم در بین اعداد طبیعی رویده‌اند، می‌توانند هر عدد طبیعی و بزرگتر از یک را بسازند و به عنوان بلوک‌های ساختمانی برای اعداد طبیعی به کار بروند.

$$۳۶ = ۲^۲ \times ۳^۲ \quad , \quad ۱۰۰ = ۲^۲ \times ۵^۲$$

$$۲۷ = ۳^۳ \quad , \quad ۵ = ۵^۱ \quad , \quad ۱۲ = ۲^۲ \times ۳$$

## مرور فصل ۲

### مفاهیم و مهارت‌ها

اصطلاحات زیر در این فصل به کار رفته‌اند. مطمئن شوید که می‌توانید با جمله‌های خود، آنها را توصیف کنید و برای هر کدام مثالی بزنید.

• نمودار درختی • عدد مرکب • نسبت به هم اول • روش غربال

روش‌های اصلی زیر در این فصل مطرح شده‌اند. با یک مثال هر کدام را توضیح دهید و خلاصه درس را در دفتر خود بنویسید.

- پیدا کردن عددهای اول با روش‌های تقسیم، ضرب و بخش پذیری
- تشخیص عددهای اول و مرکب
- تعیین عددهای اول به کمک روش غربال
- دنبال کردن یک دستورالعمل و نمودار
- تعیین اینکه یک عدد، اول یا مرکب است.

### کاربرد

این درس در فصل مربوط به توان و جذر کاربرد دارد. از تبدیل پایه‌های مرکب به پایه‌های عدد اول برای ساده کردن عبارت‌های توان دار استفاده می‌شود.

### تمرین‌های ترکیبی

۱- یک عدد مرکب بنویسید که شمارنده‌های اول غیر از ۲ و ۳ نداشته باشد. آیا این عدد و عددی که شمارنده‌های اول آن ۲ و ۵ است، نسبت به هم اول‌اند؟ چرا؟ *مضرب - زیرا عدد در آن هاست*  
*بخش بی‌نهایت*

۲- با روش غربال، عددهای اول بین ۲۰ و ۴۰ را پیدا کنید. در این روش، کار را از خط زدن مضرب‌های کدام عدد شروع می‌کنید و با مضرب‌های کدام عدد پایان می‌دهید؟ *شروع با مضرب ۲*  
*و با مضرب ۳*

۳- آیا عدد ۱۳۷ اول است؟ چرا؟ *بله - زیرا ۱۳۷ به هیچ کدام از اعداد اول کوچکتر از  $\sqrt{137}$  (یعنی ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱) بخش پذیر نیست*

۴- ۲ عدد مرکب بنویسید که نسبت به هم اول باشند. *(۴، ۹)*