



۴

فصل

جبر و معادله



اگر دو کفه یک ترازو روبه‌روی هم قرار گیرند، می‌گویند ترازو در حال تعادل است. اگر از یک کفه ترازو چیزی را برداریم یا به آن چیزی اضافه کنیم، همین کار را باید در کفه دیگر نیز انجام دهیم تا جبران شود و ترازو در حالت تعادل بماند. کلمه جبر هم خانواده جبران نیز هست و معادله به معنی برقرار ماندن تعادل در دو طرف تساوی است.



۱- در سال گذشته با درس توان آشنا شدید. عبارت های کلامی را به صورت جبری و عبارت های

جبری را به صورت کلامی بنویسید.

• $a^1 = a$ هر عدد به توان یک، برابر خود عدد می شود. • $a^0 = 1$ (هر عدد (جز صفر) به توان صفر برابر یک است

• $1^x = 1$ یک به توان هر عدد، برابر یک می شود. • صفر به توان هر عدد مثبت، برابر صفر می شود. $(0^x = 0)$

• در ضرب دو عبارت توان دار با پایه های مساوی، یک پایه را می نویسیم و توان ها را با هم جمع می کنیم. $a^m \times a^n = a^{m+n}$

• مربع یا مجذور عدد a a^2

$$b^a \times c^a = (bc)^a$$

که ضرب در عدد توان دار! پایه های مساوی یک از توان ها را نوشته و پایه ها را در هم ضرب می کنیم

۲- الف) در عبارت جبری $2n - 1$ به جای n عددهای طبیعی $(1, 2, 3, \dots)$ قرار دهید و الگوی

عددی متناظر را بنویسید.

۱, ۳, ۵, ۷, ۹, ...

ب) در عبارت جبری $2m + 1$ به جای m عددهای حسابی $(0, 1, 2, 3, \dots)$ قرار دهید و الگوی

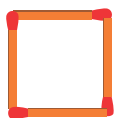
عددی متناظر را بنویسید.

۱, ۳, ۵, ۷, ۹, ...

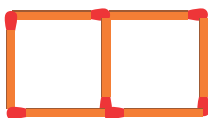
آیا دو الگوی عددی با هم تفاوت دارند؟ **خیر**

۳- شکل های زیر با چوب کبریت و با الگویی مشخص ساخته شده اند. شکل n ام با چند چوب

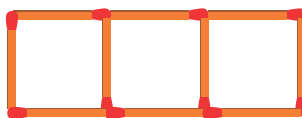
کبریت ساخته می شود؟



شکل (۱)



شکل (۲)



شکل (۳)

در اینجا پاسخ چهار دانش آموز را می بینید. توضیح دهید هر کدام از آنها پاسخ خود را چگونه به دست

آورده است؛ سپس مانند نمونه ها، شکل هایی رسم کنید که روش مانهوش را مشخص کند و بین شکل ها و

عبارت های جبری رابطه برقرار کنید.



پاسخ مانهوش: $4 + (n-1) \times 3 = 3 + 3n - 3 = 3n + 1$

پاسخ ماهر: $1 + n + n + n = 1 + 3n$



پاسخ مهتاب: $n+1 + (n \times 2) \leftarrow 2 + (1 \times 2), 3 + (2 \times 2), 4 + (3 \times 2), 5 + (4 \times 2)$

$$n+1 + 2n = 3n+1$$

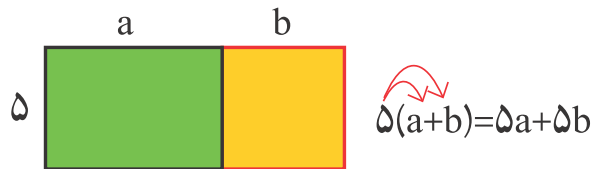
پاسخ های مانهوش، ماهر و مهتاب را ساده کنید. آیا با پاسخ مانهوش یکی هستند؟ **بله**

آیا شما هم روشی برای شمارش چوب کبریت ها و یافتن جمله n ام دارید؟

کار در کلاس



۱- در سال گذشته، ضرب یک عدد را در پرانتز با شکل زیر یاد گرفتید.



این تساوی چگونه به کمک شکل به دست آمده است؟ توضیح دهید.

عبارت‌های جبری زیر را ساده کنید.

$$3(2x-1) + 2(x+3) = 6x - 3 + 2x + 6 = 8x + 3$$

$$-2(y-1) + 3(1-y) = -2y + 2 + 3 - 3y = 5 - 5y$$

$$-(a-b+1) + 2(2a+b-3) = -a + b - 1 + 4a + 2b - 6 = 3a + 3b - 7$$

۲- شما همچنین جمع و تفریق جمله‌های متشابه (جمله‌هایی که همه قسمت‌های حرفی

آنها یکی هستند) را یاد گرفتید. جمله‌های متشابه را پیدا کنید.

$$3x^2y \quad 7yx^2 \quad 2yx \quad -5x \quad +5y \quad -3xy \quad +4x \quad y$$

فعالیت



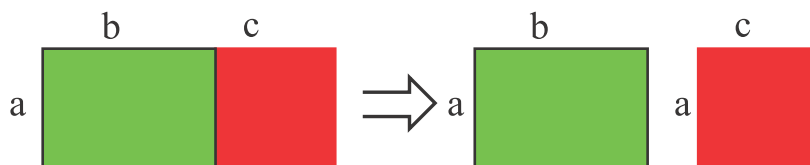
۱- حاصل ضرب دو جمله را مانند نمونه به دست آورید. از کدام قانون ساده کردن

عبارت‌های توان‌دار استفاده می‌کنید؟ توضیح دهید.

$$(-3ba)(2a^2b^2) = -6a^3b^3 \quad a \times a^2 = a^3, \quad b \times b^2 = b^3$$

$$2a \times 3b = 6ab \quad -6a \times 2a^2 = -12a^3 \quad 4ba \times 3b^2 = 12b^3a$$

۲- با توجه به شکل و مساوی بودن مساحت‌ها در دو قسمت، یک تساوی جبری نتیجه بگیرید.



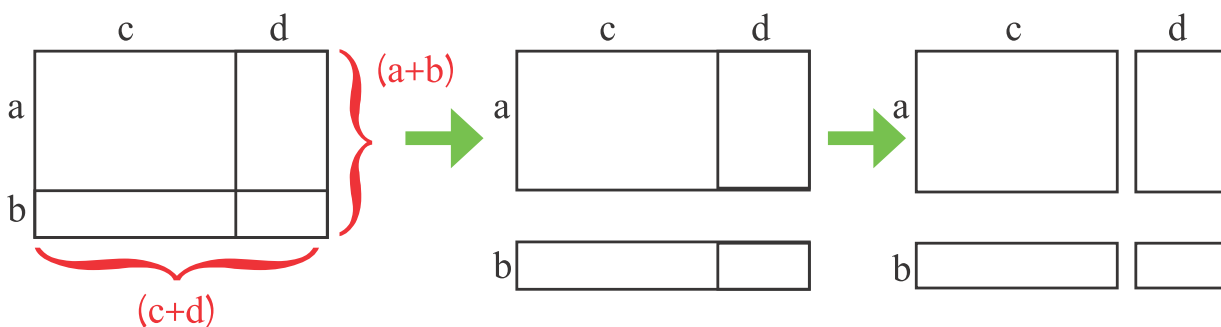
$$a(b+c) = ab + ac$$

با توجه به نتیجه‌ای که گرفته‌اید، ضرب‌های زیر را انجام دهید.

$$2a(a+b) = 2a^2 + 2ab$$

$$3x(2x-1) = 6x^2 - 3x$$

۳- با توجه به شکل و مساوی بودن مساحت‌ها در دو قسمت، تساوی جبری را کامل کنید.



$$(a+b)(c+d) = a(c+d) + b(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

برای یافتن حاصل ضرب دو عبارت جبری، باید جمله‌های دو عبارت را در هم ضرب و سپس

ساده کنید.

$$(x+y)(x-y) = x^2 - xy + yx - y^2 = x^2 - y^2$$

$$(x-1)(x+1) = x^2 + x - x - 1 = x^2 - 1$$

$$(3x-2)(2x-3) = 6x^2 - 9x - 4x + 6 = 6x^2 - 13x + 6$$

کارد در کلاس



۱- عبارت‌های زیر را ساده کنید.

$$4ax + a^2 + ax = 5ax + a^2$$

$$3ab + b^2 - a^2 - 5ab = -2ab + b^2 - a^2$$

$$2a - 8xy + 2xy = 2a - 6xy$$

$$9x + 7x - 8x - 3 + 11x + 5 = 19x + 2$$

$$5(-2a) = -10a \quad \frac{3}{2}(4b) = 6b$$

$$(-7)(-4x) = 28x \quad \left(-\frac{4}{5}\right)(2y) = -\frac{8}{5}y$$

$$3a(-5x) = -15ax \quad -\frac{1}{2}a(3b) = -\frac{3}{2}ab \quad (-a)(-b) = ab \quad (-a)(-a) = a^2$$

$$2x(3a-b) = 6ax - 2bx \quad 3y(2x-5y) = 6xy - 15y^2$$

$$(x+2)(x+1) = x^2 + x + 2x + 2 = x^2 + 3x + 2$$

$$(a+6)(a-6) = a^2 - 4a + 4a - 36 = a^2 - 36$$

۲- عدد ۴۷ را می‌توان به صورت $40 + 7$ یا $4 \times 10 + 7$ نوشت؛ به همین ترتیب، عددهای زیر را

به صورت گسترده بنویسید.

$$92 = 90 + 2$$

$$75 = 70 + 5$$

$$33 = 30 + 3$$

$$\overline{ab} = 10a + b$$

عدد دورقمی ab را با نماد \overline{ab} نمایش می‌دهیم؛ بنابراین:

تمرین



۱- عبارت جبری جمله n ام هر یک از الگوهای عددی زیر را بنویسید.

$$1, 4, 9, 16, 25, \dots \rightarrow n^2$$

$$1, 8, 27, 64, 125, \dots \rightarrow n^3$$

$$a^2 + 3a + 9 = a^2 + 4a + 9$$

$$(a+3)(a+3)$$

$$a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a-b)(a-b) =$$

$$(a+3)(a-3) = a^2 - 3a + 3a - 9 = a^2 - 9$$

$$(a+b)(a-b) =$$

$$a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

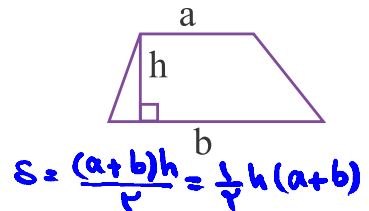
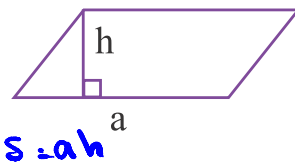
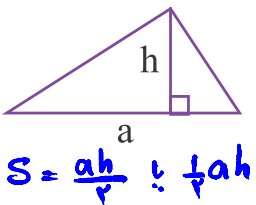
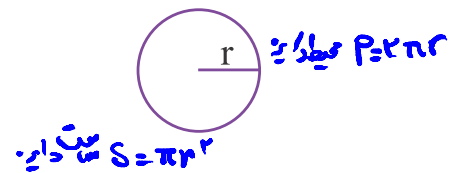
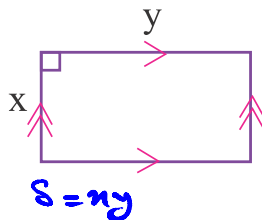
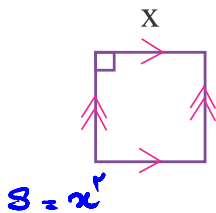
$$(x+y)(x+y) =$$

$$x^2 + xy + yx + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(2x-3y)(2x-3y) =$$

$$4x^2 - 6xy - 6xy + 9y^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2$$

۳- مساحت هر شکل را با یک عبارت جبری بیان کنید.



۴- دانش آموزی، عبارت های جبری زیر را نادرست ساده کرده است. اشتباه او را پیدا کنید.

$$a(b+c) = ab + c \quad \text{(الف)}$$

$$2x + 3y - (2x - y) = 2x + 3y - 2x - y = 2y \quad \text{(ب)}$$

۵- با توجه به شکل، یک تساوی جبری بنویسید.

$$a(b+c+d) = ab + ac + ad$$



فعالیت



۱- ماشین عددساز \times عدد ورودی را در عدد داخل ماشین ضرب می‌کند.
ماشین عددساز $+$ عدد ورودی را با عدد داخل ماشین جمع می‌کند. مانند نمونه، خروجی هر ماشین را مشخص کنید یا عدد داخل ماشین را بنویسید.

$a + 4$: خروجی \rightarrow $+$ 4 ورودی a : $7 \times (-3) = -21$: خروجی \rightarrow \times -3 ورودی 7 :

$0 - 5 = -5$: خروجی \rightarrow $-$ 5 ورودی 0 : $4 \times 5 = 20$: خروجی \rightarrow \times 5 ورودی 4 :

$c + 0 = c$: خروجی \rightarrow $+$ 0 ورودی c : $b \times 2 = 2b$: خروجی \rightarrow \times 2 ورودی b :

5 : خروجی \rightarrow $-$ 8 ورودی 13 : 0 : خروجی \rightarrow \times 0 ورودی 8 :

۲- خروجی یک ماشین \times را به ورودی یک ماشین $+$ می‌بندیم و یک ماشین ترکیبی می‌سازیم. مانند نمونه، خروجی هر ماشین را مشخص کنید.

$3x - 5$: خروجی \rightarrow $-$ 5 \Rightarrow \times 3 ورودی x : 1 : خروجی \rightarrow $+$ 5 \Rightarrow \times 3 ورودی 2 :

$-x + 8$: خروجی \rightarrow $+$ 8 \Rightarrow $-$ x ورودی x : 1 : خروجی \rightarrow $+$ 8 \Rightarrow $-$ 1 ورودی 7 :

$10x + 5$: خروجی \rightarrow $+$ 5 \Rightarrow \times 10 ورودی x : 5 : خروجی \rightarrow $+$ 5 \Rightarrow \times 10 ورودی 5 :

به این ترتیب، می‌توانیم عملکرد هر ماشین ترکیبی را به شکل خلاصه، مانند مثال زیر، بنویسیم :

عملکرد ماشین ترکیبی
 $y = 7x + 4$

x : ورودی \rightarrow \times 7 \Rightarrow $+$ 4 : خروجی y

کار در کلاس



۱- عدد x به ماشین‌های زیر وارد، و عدد y از آنها خارج می‌شود. با توجه به کاری که این ماشین‌ها انجام می‌دهند، عددهای خروجی را بنویسید.

$$-2 \longrightarrow \boxed{3x-1} \longrightarrow -7$$

$$4 \longrightarrow \boxed{-2x+1} \longrightarrow -7$$

$$0 \longrightarrow \boxed{\frac{1}{2}x+1} \longrightarrow 1$$

$$\frac{4}{7} \longrightarrow \boxed{-7x+2} \longrightarrow 6$$

۲- با توجه به جدول‌های زیر و رابطه x و y ، جاهای خالی جدول‌ها را پر کنید:

$$y=3x+1$$

$$y=5x$$

$$y=x-7$$

$$y=2x-3$$

x	y
1	4
2	7
5	16

x	y
3	15
-2	-1
-4	-20
5	25

x	y
4	-3
-2	-9
7	0
-7	-14

x	y
4	5
-2	-7
$\frac{3}{2}$	0
4	5

۳- با توجه به عددهای ورودی و خروجی در هر ردیف، کاری را که ماشین انجام می‌دهد حدس بزنید.

$$3 \longrightarrow \boxed{2x} \longrightarrow 6 \text{ و } -7 \longrightarrow \boxed{2x} \longrightarrow -14 \text{ و } 5 \longrightarrow \boxed{2x} \longrightarrow 10 \quad y=2x$$

$$5 \longrightarrow \boxed{x+3} \longrightarrow 8 \text{ و } 11 \longrightarrow \boxed{x+3} \longrightarrow 14 \text{ و } -4 \longrightarrow \boxed{x+3} \longrightarrow -1 \quad y=x+3$$

فعالیت



۱- به عددهای زوج زیر توجه کنید. همان‌طور که می‌بینید، هر عدد زوج را می‌توان به صورت $2 \times n$ نشان داد.

2	4	6	8	10
↓	↓	↓	↓	↓
2×1	2×2	2×3	2×4	2×5

۲- عددهای زوج زیر را به صورت $2n$ (n یک عدد طبیعی باشد) نشان دهید.

$$\begin{array}{ccccc} 44 & 80 & 700 & 10000 & 2000 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 \times 22 & 2 \times 40 & 2 \times 350 & 2 \times 5000 & 2 \times 1000 \end{array}$$

۳- در عبارت های زیر به جای حروف k ، m و a عددهای طبیعی مختلفی قرار دهید. آیا

عددهای حاصل، زوج اند؟

$$\begin{array}{ccc} 2a & 2m & 2k \\ \swarrow \quad \searrow & \swarrow \quad \searrow & \swarrow \quad \searrow \\ 2 \times 5 & & \end{array}$$

۴- a ، b و c را عددهای طبیعی در نظر بگیرید و به سؤال های زیر پاسخ دهید :

۱- آیا عبارت $2b$ یک عدد زوج را نشان می دهد؟

۲- آیا عبارت $4c$ یک عدد زوج را نشان می دهد؟ چرا؟

۳- آیا عبارت $2ab$ یک عدد زوج را نشان می دهد؟ چرا؟

۵- آیا حاصل ضرب هر دو عدد زوج عددی زوج است؟

برای پاسخ دادن به این سؤال، ابتدا مانند نمونه چند مثال بزنید.

$$\begin{array}{ccc} 4 \times 2 = 8 & 8 \times 2 = 16 & 9 \times 8 = 72 \\ 10 \times 12 = 120 & 4 \times 10 = 40 & 2 \times 2 = 4 \end{array}$$

برای اینکه بدون مثال و در حالت کلی اثبات کنیم که جمله بالا درست است، دو عدد زوج را

به صورت $2m$ و $2n$ در نظر می گیریم و حاصل ضرب آنها را می نویسیم.

$$2m \times 2n = 2(m \times 2 \times n) = 2k$$

چگونه این تساوی ثابت می کند که حاصل ضرب دو عدد زوج عددی زوج است؟ توضیح دهید.

کار در کلاس



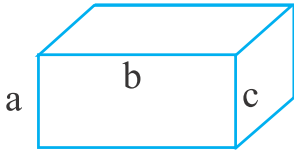
مانند سؤال ۵ فعالیت بالا، ثابت کنید که حاصل ضرب یک عدد زوج در یک عدد فرد، عددی زوج است.

(الف) چند مثال بزنید.

(ب) به صورت جبری ثابت کنید: $2m - 1 = \text{عدد فرد}$ $2n = \text{عدد زوج}$

$$\text{حاصل ضرب عدد زوج در عدد فرد} = 2n \times (2m - 1) = 2 \underbrace{n(2m - 1)}_k = 2k$$

تمرین



۱- مساحت کل مکعب مستطیل روبه‌رو

را به صورت جبری بنویسید. $S = 2ab + 2ac + 2bc$

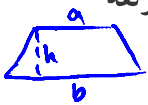
اگر $a = 2$ و $b = 6$ و $c = 3$ باشند، مساحت کل چقدر می‌شود؟ $S = 2(12) + 2(18) + 2(18) = 72$

۲- مساحت قاعده منشوری 20° و ارتفاع آن ۴ است. حجم این منشور را با نوشتن رابطه

$$V = S \cdot h \Rightarrow V = 2 \times 4 = 8$$

جبری حجم منشورها به دست آورید.

۳- قاعده‌های دوزنقه‌ای ۴ و ۷ سانتی متر و ارتفاع آن ۲ سانتی متر است. مساحت این دوزنقه



$$S = \frac{(a+b)h}{2} = \frac{(4+7) \times 2}{2} = 11$$

را پس از نوشتن رابطه جبری مساحت دوزنقه حساب کنید.

۴- آیا $x = 2$ و $x = -2$ پاسخ معادله $x^2 = 4$ هستند؟ چرا؟ **بله - چون $2^2 = 4$ و $(-2)^2 = 4$**

۵- طول یک لوله x متر است. طول لوله دیگر، y برابر لوله اول است. طول لوله دوم را

$$\text{طول لوله دوم} = 2x$$

به صورت جبری بنویسید.

۶- یک زمین والیبال مستطیل شکل، دارای x متر عرض

و $2x$ متر طول است. مساحت این زمین را به صورت جبری نشان

دهید. اگر عرض این زمین ۹ متر باشد، مساحت آن چند متر مربع است؟

$$S = x(2x) = 2x^2$$

$$S = 2 \times 9^2 = 2 \times 81 = 162$$

۷- در درس علوم یاد می‌گیرید که انرژی پتانسیل ذخیره شده در هر جسم از رابطه $U = mg \cdot h$

به دست می‌آید که در آن، U انرژی پتانسیل، m جرم جسم، g شتاب زمین و h ارتفاع جسم است. در صورتی

که جسمی به جرم ۲۵ کیلوگرم تا ارتفاع ۴ متر بالا برود، مقدار انرژی پتانسیل آن را پیدا کنید. (شتاب زمین

$$U = 25 \times 4 \times 10 = 1000$$

را 10 فرض کنید.)

۸- با توجه به رابطه x و y ، مقدار y را برای x های مختلف پیدا کنید.

$$y = x - 3$$

x	y
۱	-۲
۰	-۳
۲	-۱
-۱	-۴

$$y = -2x + 1$$

x	y
۱	-۱
۰	۱
۲	-۳
-۱	۳

$$y = x^2$$

x	y
۲	۴
-۲	۴
۰	۰
-۱	۱



۱- در دوره دبستان یاد گرفتید که با تبدیل صورت و مخرج کسر به ضرب عددها، می‌توان کسر را ساده کرد.

$$\frac{6}{9} = \frac{2 \times \cancel{3}}{3 \times \cancel{3}} = \frac{2}{3}$$

کسرهای زیر را مانند نمونه ساده کنید.

$$\frac{12}{18} = \frac{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{3}}{\cancel{2} \times \cancel{3} \times 3} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{15}{35} = \frac{\cancel{5} \times 3}{\cancel{5} \times 7} = \frac{3}{7}$$

۲- بعضی از عبارت‌های جبری را نیز می‌توان به صورت ضرب دو یا چند عبارت نوشت:

$$\left. \begin{array}{l} a(b+c) = ab+ac \quad \text{خاصیت توزیع پذیری} \\ ab + ac = a(b+c) \quad \text{تجزیه (تبدیل به ضرب)} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{توزیع پذیری}} \\ a(b+c) = ab+ac \\ \xleftarrow{\text{تجزیه}} \end{array}$$

با توجه به تساوی بالا، عبارت‌ها را به ضرب تبدیل کنید.

$$5ab + 8ac = a(5b + 8c)$$

$$x + xy = x(1+y)$$

$$5ab + 3b = b(5a + 3)$$

$$3a + ab = a(3+b)$$

۳- برای تجزیه یک عبارت جبری، عامل یا بخش مشترک دو یا چند جمله را پیدا می‌کنیم و بیرون پراتز می‌نویسیم. برای تشخیص قسمت مشترک، می‌توان عبارت‌ها را به صورت ضرب نوشت:

$$\begin{aligned} 6a^2b^2 + 9a^3b^2 &= 2 \times 3 \times \cancel{a} \times \cancel{a} \times b \times \cancel{b} \times \cancel{b} + 3 \times 3 \times \cancel{a} \times \cancel{a} \times \cancel{a} \times \cancel{b} \times \cancel{b} \\ &= 2 \times 3 \times \cancel{a^2} \times \cancel{b^2} \times b + 3 \times 3 \times \cancel{a^2} \times \cancel{b^2} \times a \end{aligned}$$

با توجه به تساوی بالا، عامل مشترک دو جمله عبارت جبری چیست؟ $6a^2b^2$

با ضرب کردن چه عبارتی در جمله مشترک، جمله اول عبارت ساخته می‌شود؟ $2b$

با ضرب کردن چه عبارتی در جمله مشترک، جمله دوم عبارت ساخته می‌شود؟ $3a$

حالا این تساوی را کامل کنید. $6a^2b^2 + 9a^3b^2 = 3a^2b^2(2b + 3a)$

۴- با توجه به سؤال صفحه قبل، عبارت‌های جبری زیر را تجزیه کنید.

$$ab+ac=a(b+c)$$

$$ab-ac=a(b-c)$$

$$5ab+3abc=ab(5+3c)$$

$$6ab+3a^2=3a(2b+a)$$

$$4x^2y+6xy^2=2xy(2x+3y)$$

$$8x^2y^3-4xy^2=4xy^2(2xy-1)$$

۵- ابتدا صورت و مخرج کسر را تجزیه و سپس آن را ساده کنید.

$$\frac{ab+ac}{ab-ac} = \frac{a(b+c)}{a(b-c)} = \frac{b+c}{b-c} \quad (a \neq 0, b \neq c)$$

$$\frac{a^2-a}{ab-b} = \frac{a(a-1)}{b(a-1)} = \frac{a}{b} \quad (a \neq 1, b \neq 0)$$

کار در کلاس



۱- عبارت‌های زیر را به ضرب تبدیل کنید.

$$x \times 2^a - y \times 2^a = 2^a(x-y)$$

$$22xy^2 - 35x^2y^2 = 7xy^2(4y-5x)$$

$$2^x \times 2^y - 2^x \times 2^z = 2^x(2^y - 2^z)$$

$$-a^2 + 2a^2 = a^2(-1+2)$$

۲- با تبدیل به ضرب، صورت و مخرج کسر را ساده کنید. $(a \neq b, ab \neq 0)$

$$\frac{a^2b-ab^2}{a^3b^2-a^2b^3} = \frac{ab(a-b)}{a^2b^2(a-b)} = \frac{ab}{a^2b^2} = \frac{1}{ab}$$

۳- آیا تساوی $-a-b = -(a+b)$ همواره برقرار است؟

۴- چرا مجموع دو عدد زوج، عددی زوج می‌شود؟

$2n$: عدد زوج

$2m$: عدد زوج دیگر

$$2n + 2m = 2\left(\frac{n+m}{1}\right) = 2k$$

خواندنی

خوارزمی در کتاب جبر و مقابله خود برای عددهای علامت‌دار اصطلاحاتی به کار برده است؛ برای مثال ۵- را «پنج ناقص» و ۵+ را «پنج زاید» خوانده است. با اینکه در زمان خوارزمی کاربرد حروف متداول نبوده است، او در حل معادله‌های جبری، مجهول را «شیئی» و مجذور مجهول را «مال» نامیده است.

فعالیت



۱- تفاوت x^2 و $2x$ چیست؟

$$x^2 = x \times x$$

$$2x = x + x$$

۲- مانند نمونه، طرف دیگر تساوی ها را بنویسید.

$$3^2 = 3 \times 3$$

$$(-5)^2 = -5 \times -5$$

$$a^2 = a \times a$$

$$\square^2 = \square \times \square$$

$$\triangle^2 = \triangle \times \triangle$$

$$(a+b)^2 = (a+b) \times (a+b)$$

۳- جدول زیر را برای مقدارهای مختلف a و b کامل کنید.

a	۱	۲	۰	۲	-۱
b	۱	۰	-۳	۴	-۲
$(a+b)^2$	$(1+1)^2=4$	$(2+0)^2=4$	$(0-3)^2=9$	$(2+4)^2=36$	$(-1-2)^2=9$
a^2+b^2	$1^2+1^2=2$	$2^2+0^2=4$	$0^2+(-3)^2=9$	$2^2+4^2=20$	$(-1)^2+(-2)^2=5$

از مقایسه دو ردیف آخر، چه نتیجه ای می گیرید؟ نتیجه $(a+b)^2 \neq a^2+b^2$

۴- مانند نمونه، عبارت ها را ساده کنید.

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(x-y)^2 = (x-y)(x-y) = x^2 - xy - yx + y^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

$$(2x+1)^2 = (2x+1)(2x+1) = 4x^2 + 2x + 2x + 1 = 4x^2 + 4x + 1$$

کار در کلاس



۱- مانند نمونه، تساوی ها را کامل کنید.

$$x^3 = x \times x \times x$$

$$-x^2 = -x \times x$$

$$(-x)^2 = (-x)(-x)$$

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$$

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b)$$

$$(x+1)^2 = (x+1)(x+1)$$

۲- چرا $ba = ab$ است؟ (از کدام خاصیت ضرب استفاده می شود؟) خاصیت جابجایی در ضرب

۳- عبارت زیر را ساده کنید.

$$-(a+b)^2 = -(a+b)(a+b) = -(a^2 + ab + ba + b^2) = -(a^2 + 2ab + b^2) = -a^2 - 2ab - b^2$$

آیا منفی به توان ۲ می رسد؟ خیر. چرا؟ (چون مربع از یک عدد همیشه مثبت قرار دارد.)



تمرین

$$-(a-b) = -a + b = b - a$$

۱- آیا $b-a = -(a-b)$ است؟ چرا؟ نه.

۲- چرا مجموع دو عدد فرد، عددی زوج می‌شود؟
 $2n-1 + 2m-1 = 2n+2m-2 = 2(n+m-1) = 2k$

۳- مجموع دو عدد که یکی زوج و دیگری فرد باشد، زوج می‌شود یا فرد؟ چرا؟
 $2n + 2m-1 = 2(n+m)-1 = 2k-1$

۴- عبارت‌های جبری زیر را ساده کنید.
 $= a^2 + 2a + 9$

$$(a+3)^2 = (a+3)(a+3) = a^2 + 3a + 3a + 9$$

$$(2x-3y)^2 = (2x-3y)(2x-3y) = 4x^2 - 6xy - 6xy + 9y^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2$$

$$(x+7)(x-7) =$$

$$x^2 - 7x + 7x - 49 = x^2 - 49$$

$$a^2 + b^2 - (a-b)^2 = a^2 + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2) = a^2 + b^2 - a^2 + 2ab - b^2 = 2ab$$

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

۵- با توجه به پیکان‌های رسم شده، عبارت را ساده کنید.

$$(x-1)(x^2+x+1) = x^3 + x^2 + x - x^2 - x - 1 = x^3 - 1$$

۶- اگر دو پرانتز زیر را در هم ضرب کنیم، چند جمله خواهیم داشت؟ چرا؟ ۹ جمله.

$$(a+b+c)(z+y+x) = az + ay + ax + bz + by + bx + cz + cy + cx$$

خواندنی

خوارزمی

ابو عبدالله محمد بن موسی خوارزمی حدود سال ۱۳۵ هجری قمری در شهر خوارزم (که امروز خیره نامیده می‌شود) متولد شد. وی یکی از مفاخر علمی ایران و جهان و از بزرگ‌ترین دانشمندان مسلمان در قرن‌های گذشته است.

یکی از آثار خوارزمی کتاب جبر و مقابله است. این کتاب نخستین کتابی است که نام جبر را بر خود دارد. نام جبر به عنوان بخشی از ریاضی از نام این کتاب گرفته شده است. از این نظر، خوارزمی را می‌توان یکی از بنیان‌گذاران علم جبر دانست. امروز جبر به شاخه‌ای مهم از ریاضی گفته می‌شود.

کتاب حساب خوارزمی در قرن دوازدهم هجری به زبان‌های اروپایی ترجمه شد و به «الخوریسمی» یا «الگوریسمی» که از نام «الخوارزمی» گرفته شده بود، شهرت یافت. بعدها الگوریتم (Algorithm) به معنای فن محاسبه (یعنی حساب) به کار رفت. امروزه الگوریتم به روشی از محاسبه گفته می‌شود که در آن محاسبه مرحله به مرحله انجام می‌گیرد و محاسبه هر مرحله به مراحل قبلی بستگی دارد.

فعالیت

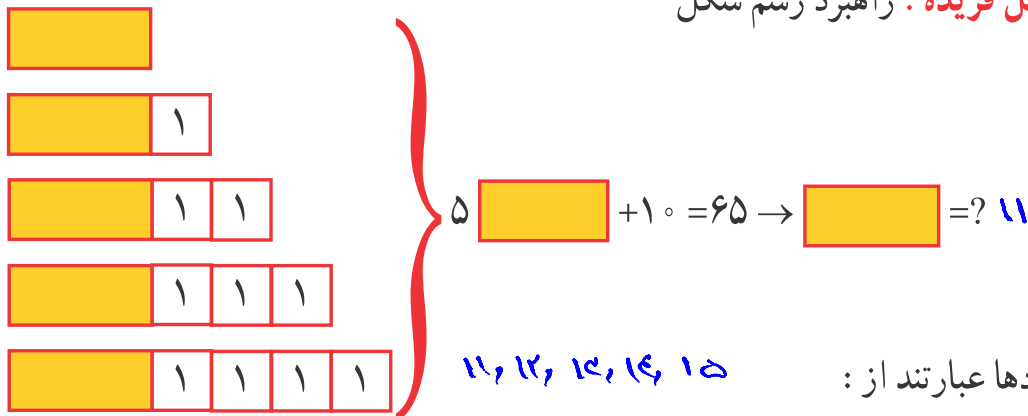


۱- حاصل جمع پنج عدد متوالی طبیعی ۶۵ شده است. عدد وسط چه عددی است؟
پنج دانش آموز این مسئله را با راهبردهای مختلف حل کرده اند. راه حل هر کدام را کامل کنید و توضیح دهید.

راه حل سمیه: راهبرد حدس و آزمایش

حاصل جمع	عدد پنجم	عدد چهارم	عدد سوم	عدد دوم	عدد اول
۳۵	۹	۸	۷	۶	۵
۴۵	۱۱	۱۰	۹	۸	۷
۵۵	۱۵	۱۴	۱۳	۱۲	۱۱

راه حل فریده: راهبرد رسم شکل



راه حل فهیمه: راهبرد روش های نمادین

$$O + (O + 1) + (O + 2) + (O + 3) + (O + 4) = 65$$

$$5O + 10 = 65 \rightarrow O = ? 11$$

عدد وسطی را در تساوی بالا مشخص کنید.

و عددها عبارتند از: ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵

راه حل مهدیه: راهبرد تشکیل معادله

کوچکترین عدد

$$x + (x + 1) + (x + 2) + (x + 3) + (x + 4) = 65$$

$$5x + 10 = 65 \rightarrow x = 11$$

و عددها عبارتند از: ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵

راه حل فرشته: راهبرد تشکیل معادله

عدد وسط

$$(x - 2) + (x - 1) + x + (x + 1) + (x + 2) = 65$$

تفاوت راه حل های فرشته و مهدیه را توضیح دهید.
 عدد کوچکترین را x فرض کرد.
 در فرشته عدد وسطی را x در نظر گرفته

۲- مهدیه با توجه به آنچه سال گذشته آموخته بود، معادله خود را به صورت زیر حل کرد :

$$\begin{aligned} 5x + 10 &= 65 \\ -10 & \\ \hline 5x + 10 - 10 &= 65 - 10 \\ 5x &= 55 \\ \times \frac{1}{5} & \\ \hline \frac{1}{5} \times 5x &= \frac{1}{5} \times 55 \\ x &= 11 \end{aligned}$$

معلم راه حل مهدیه را به صورت زیر خلاصه کرد. توضیح دهید در این روش معنی یکان‌ها

چیست؟

$$\begin{aligned} 5x + 10 &= 65 \\ 5x &= 65 - 10 \\ 5x = 55 &\rightarrow x = \frac{55}{5} = 11 \end{aligned}$$

۳- با توجه به سؤال بالا، روش حل معادله را توضیح دهید؛ سپس معادله‌های دیگر را به همین ترتیب حل کنید.

$$\begin{aligned} 2x - 3 &= x + 5 \\ 2x - x &= 5 + 3 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x - 1 &= x - 7 \\ 3x - x &= -7 + 1 \\ 2x &= -6 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2(x - 1) &= 3(x + 4) \\ 2x - 2 &= 3x + 12 \\ 2x - 3x &= 12 + 2 \\ -x &= 14 \\ x &= -14 \end{aligned}$$

کار در کلاس



معادله‌های زیر را حل کنید.

$$\begin{aligned} 5(x - 2) &= 8 \\ 5x - 10 &= 8 \\ 5x &= 8 + 10 \\ 5x &= 18 \\ x &= \frac{18}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 4 &= 16 \\ x &= 16 - 4 \\ x &= 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4x - 3 &= 2x - 1 + 5x \\ 4x - 3 &= 7x - 1 \\ 4x - 7x &= -1 \\ -3x &= -2 \\ x &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 - 2x &= -(x - 1) + 2 \\ 1 - 2x &= -x + 1 + 2 \\ -2x &= -x + 2 \\ -x &= 2 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2(x - 1) &= 3(1 - x) \\ 2x - 2 &= 3 - 3x \\ 2x + 3x &= 3 + 2 \\ 5x &= 5 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x - 3(1 - x) &= 0 \\ 2x - 3 + 3x &= 0 \\ 5x - 3 &= 0 \\ 5x &= 3 \\ x &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

۶۵

فعالیت



۱- معادله زیر را دو دانش آموز حل کرده اند. راه حل آنها را توضیح دهید. ویژگی های هر کدام از روش ها را بگویید و در کلاس با یکدیگر در این باره گفت و گو کنید.

راه حل یگانه

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{1}{2}x = \frac{5}{6} + \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{2}x = \frac{7}{6}$$

$$x = \frac{\frac{7}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{14}{6}$$

$$x = \frac{7}{3}$$

راه حل یکتا

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

$$6 \times \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3} \right) = 6 \times \frac{5}{6}$$

$$6 \times \frac{1}{2}x - 6 \times \frac{1}{3} = 6 \times \frac{5}{6}$$

$$3x - 2 = 5$$

$$3x = 7$$

$$x = \frac{7}{3}$$

چرا یکتا عدد ۶ را برای ضرب کردن انتخاب کرده است؟

۲- دو دانش آموز کسر $-\frac{x+3}{2}$ را به صورت زیر در ۶ ضرب کرده اند. کدام یک اشتباه کرده است؟ اشتباه او را توضیح دهید.

$$6 \times \left(-\frac{x+3}{2} \right) = -3x - 9 \quad \checkmark$$

$$6 \times \left(-\frac{x+3}{2} \right) = -3x + 9 \quad \times$$

کار در کلاس



معادله های زیر را حل کنید.

$$4 \times \left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{6} \times 4 \Rightarrow 4x - 2 = 1 \Rightarrow 4x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{4}$$

$$4 \times \left(\frac{3}{5}x - \frac{1}{2} \right) = \left(\frac{3}{4} \right) \times 2$$

$$12x - 10 = 15 \Rightarrow 12x = 25 \Rightarrow x = \frac{25}{12}$$

$$75 \times \left(-\frac{6}{25}x - \frac{4}{15} \right) = \left(\frac{1}{3} \right) \times 75$$

$$4 \times \left(\frac{x+1}{2} \right) = \left(\frac{x+2}{3} \right) \times 6$$

$$-18x - 20 = 25 \Rightarrow -18x = 45$$

$$3x + 2 = 2x + 4 \Rightarrow 3x - 2x = 4 - 2$$

$$\Rightarrow x = \frac{25}{-18} = -\frac{25}{18}$$

$$\boxed{x=1}$$

تمرین



۱- معادله‌های زیر را حل کنید.

$$14x \left(-\frac{3}{8}x + \frac{5}{1} \right) = \left(\frac{1}{6} \right) x 24$$

$$-9x + 12 = 4 \Rightarrow -9x = -11 \Rightarrow x = \frac{11}{9}$$

$$59x \left(\frac{5}{12}x - \frac{7}{18} \right) = \left(\frac{2}{1} \right) x 6$$

$$15x - 14 = 72 \Rightarrow 15x = 86 \Rightarrow x = \frac{86}{15}$$

$$14x \left(\frac{4}{7}x + \frac{2}{1} \right) = \left(\frac{3}{2} \right) x 14$$

$$54x + 28 = 21x \Rightarrow 33x = -28 \Rightarrow x = -\frac{28}{33}$$

$$30x \left(\frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \right) = (5x + 3) x 6$$

$$4x - 2 = 15x + 9 \Rightarrow -11 = 9x \Rightarrow x = -\frac{11}{9}$$

$$4x \left(\frac{1}{1} - \frac{x+1}{2} \right) = \left(\frac{1}{3} \right) x 6$$

$$4 - 2(x+1) = 2 \Rightarrow 4 - 2x - 2 = 2 \Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$4x \left(\frac{1}{2} - \frac{2x-1}{4} \right) = \left(\frac{3}{4} \right) x 4$$

$$2 - (2x-1) = 3 \Rightarrow 2 - 2x + 1 = 3 \Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

۲- عرض مستطیلی ۵ سانتی متر و محیط آن ۲۴ سانتی متر است. طول این مستطیل چقدر است؟

$$2(5+x) = 24 \Rightarrow 10 + 2x = 24 \Rightarrow 2x = 14 \Rightarrow x = 7$$

۳- هفت برابر عددی به اضافه ۴ مساوی ۵۸ است. آن عدد چند است؟

$$7x + 4 = 58 \Rightarrow 7x = 54 \Rightarrow x = \frac{54}{7}$$

۴- حاصل جمع سه عدد متوالی طبیعی ۲۷ شده است. کوچک‌ترین این عددها را پیدا کنید.

$$x + x+1 + x+2 = 27 \Rightarrow 3x + 3 = 27 \Rightarrow 3x = 24 \Rightarrow x = 8$$

۵- از پنج برابر عددی ۳ تا کم کردیم، عدد ۱۷ به دست آمد. آن عدد چند است؟

$$5x - 3 = 17 \Rightarrow 5x = 20 \Rightarrow x = 4$$

۶- اگر مربع عددی به آن عدد اضافه شود، عدد حاصل، ۴۲ خواهد بود. کدام یک از

اندازه‌های زیر می‌تواند مقدار آن عدد باشد؟

الف) ۴۲ ب) ۱۴ ج) -۶ د) -۷ ه) -۵

کافایت گزینیه‌ها را امین کنیم $x + x = 42 \rightarrow x = 21$ که در این مورد گزینیه ۵ درست است

۷- پدری ۴۵ سال دارد. دو فرزند او ۹ و ۱۴ ساله‌اند. پس از چند سال سن پدر با مجموع

$$45 + x = 14 + x + 9 + x$$

$$45 + x = 23 + 2x \Rightarrow 22 = x$$

سن فرزندانش برابر می‌شود؟

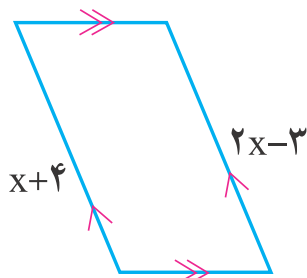
۸- در درس علوم یاد گرفتید که کار انجام شده با مقدار نیرو در اندازه جابه‌جایی برابر است.

این رابطه را با تساوی $W = F \cdot d$ نشان می‌دهیم. اگر کار انجام شده ۱۲ و مقدار نیرو ۴ باشد، مقدار

$$W = F \cdot d \Rightarrow 12 = 4d \Rightarrow d = \frac{12}{4} = 3$$

جابه‌جایی را حساب کنید.

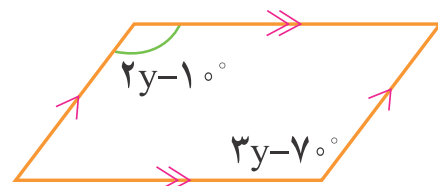
۹- با توجه به شکل، معادله تشکیل دهید و مقدار مجهول را بیابید.



$$2x - 3 = x + 4$$

$$2x - x = 4 + 3$$

$$x = 7$$



$$2y - 10 = 3y - 70$$

$$70 - 10 = 3y - 2y$$

$$60 = y$$

مرور فصل ۴

مفاهیم و مهارت‌ها

در این فصل اصطلاحات زیر به کار رفته‌اند مطمئن شوید که می‌توانید با جمله‌های خود، آنها را توصیف کنید و برای هر کدام مثالی بزنید.

- جمله‌های متشابه
- معادله
- تجزیه کردن (تبدیل به ضرب)

در این فصل، روش‌های اصلی زیر مطرح شده‌اند، با یک مثال هر کدام را توضیح دهید و در دفتر خود خلاصه درس را بنویسید.

- تبدیل عبارت جبری به عبارت کلامی و برعکس
- ساده کردن یک عبارت جبری با جمع جمله‌های متشابه
- ضرب جمله در پرانتز
- پیدا کردن مقدار عددی یک عبارت
- تبدیل یک عبارت به ضرب
- بیان رابطه جبری برای الگوهای مساحت و محیط و...
- ضرب جمله در جمله
- ضرب پرانتز در پرانتز
- حل معادله‌های کسری

کاربرد

موضوع‌های این فصل علاوه بر کاربردهایی که در ریاضی دارد به شما در حل مسئله‌های روزمره نیز کمک می‌کند. شما با تشکیل معادله و حل آن می‌توانید مسائل زیادی را حل کنید؛ به همین ترتیب، می‌توانید در سایر درس‌ها، مثل علوم، نیز از رابطه‌ها و معادله‌های جبری استفاده کنید.

تمرین ترکیبی

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\uparrow \quad (a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2) = a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2 = 4ab$$

مقدار عددی عبارت حاصل را به ازاء $a = 2$ و $b = -2$ به دست آورید.

$$\text{حاصل} = 4ab = 4(2)(-2) = -16$$

۲- معادله‌های زیر را حل کنید.

$$9x \left(\frac{x-1}{2} - \frac{x+1}{3} \right) = \left(\frac{1}{6} \right) \times 6$$

$$3(x-1) - 2(x+1) = 1$$

$$3x - 3 - 2x - 2 = 1$$

$$x - 5 = 1 \rightarrow x = 4$$

$$2x - 1 = 3(x - 1)$$

$$2x - 1 = 3x - 3$$

$$3 - 1 = 3x - 2x$$

$$2 = x$$