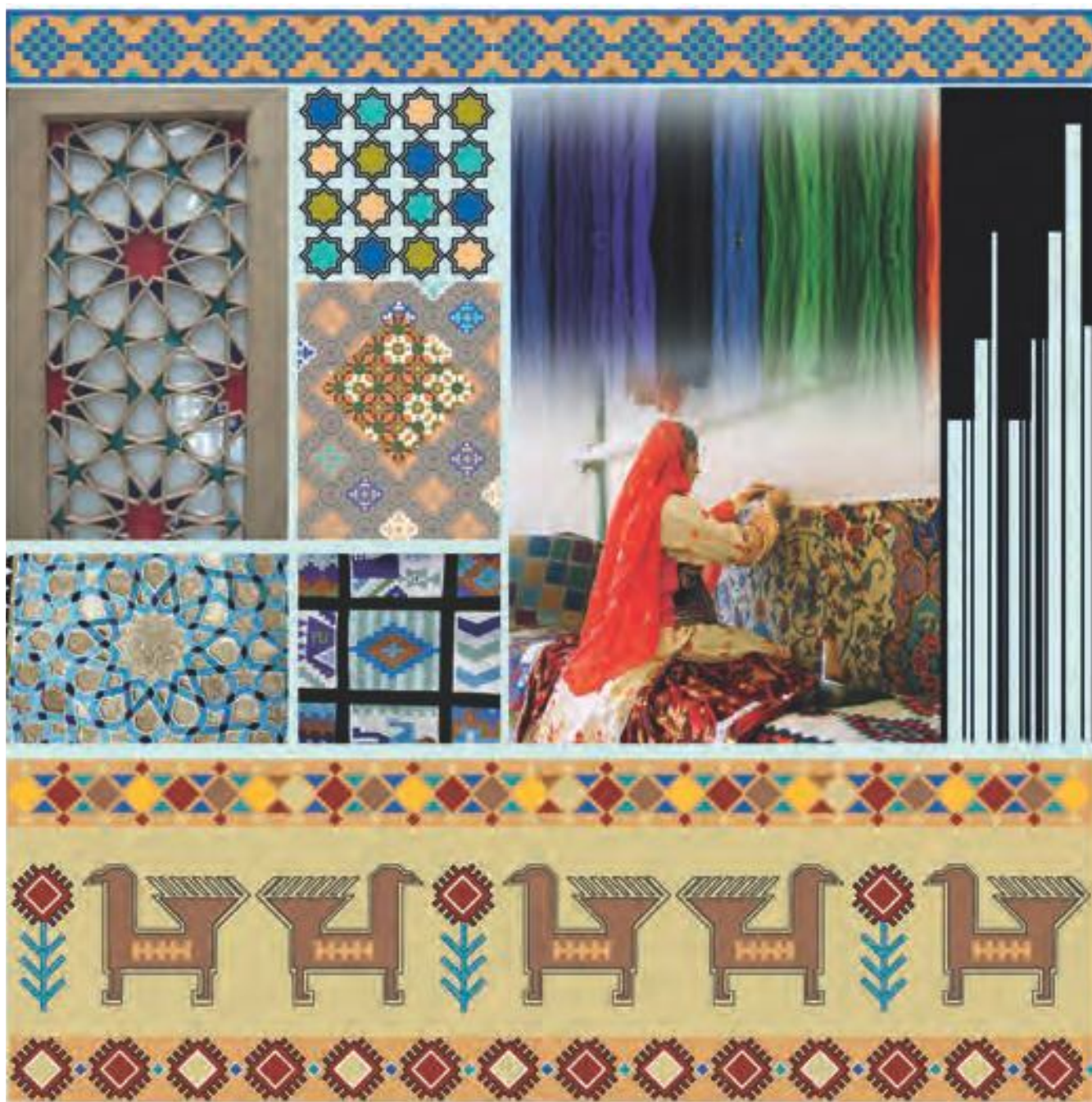




۳

فصل

چند ضلعی ها



طی هزاران سال گذشته در آثار هنری گوشه و کنار کشور پر افتخارمان، نقش مؤثر استفاده از هندسه و شکل های هندسی و نیز مفاهیم مهم آن همچون انتقال، تقارن و دوران به وضوح قابل مشاهده است.

فعالیت

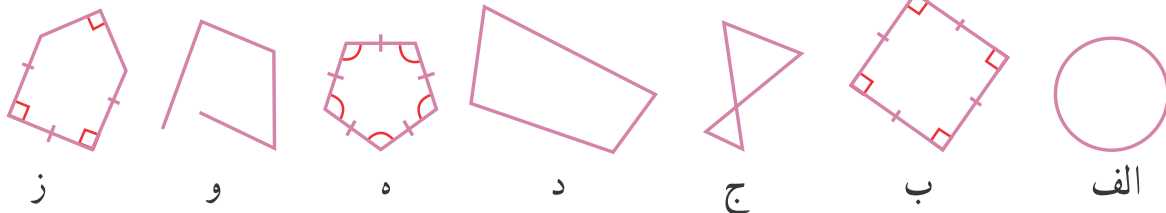


۱- در صفحه به هر خط شکسته بسته، چندضلعی گفته می‌شود به شرط اینکه ضلع‌ها یکدیگر را قطع نکنند؛ مگر در رأس‌ها که دو ضلع به هم می‌رسند.

شکل «ج» چندضلعی نیست؛ چون ضلع‌های آن یکدیگر را قطع کرده‌اند.

شکل «و» چندضلعی نیست؛ چرا؟ چون خط منکسسه، باز است و بسته نیست

شکل «الف» هم چندضلعی نیست؛ چرا؟ چون خط منکسسه نیست



۲- اگر در یک چندضلعی همه ضلع‌ها با هم و همه زاویه‌ها با هم مساوی باشند، می‌گوییم آن چندضلعی منظم است.

از میان شکل‌های بالا، کدام شکل‌ها چندضلعی منظم‌اند؟ (ب) و (ه)

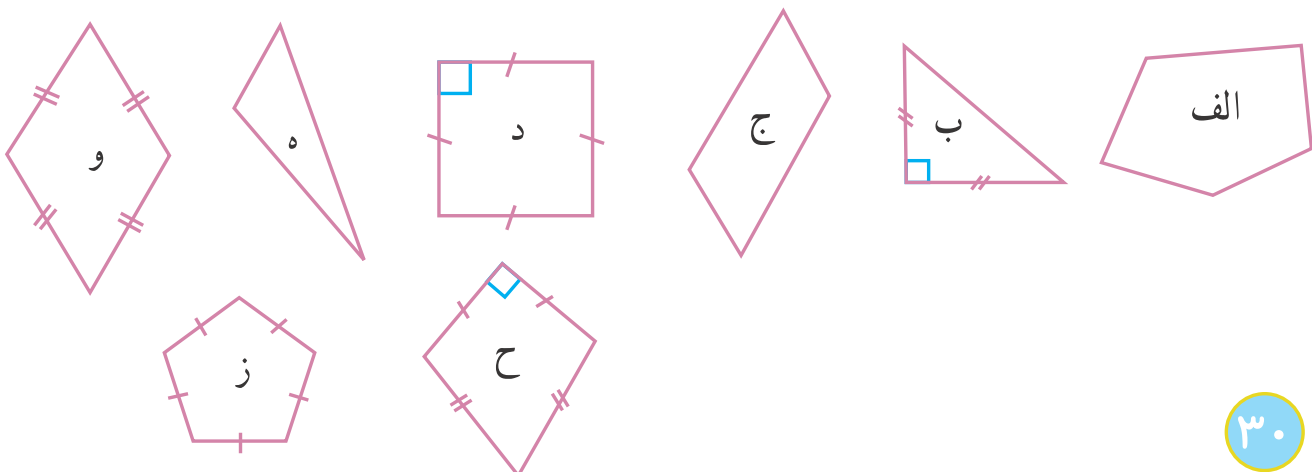
۳- یکی از شکل‌های بالا را انتخاب کنید؛ سپس درباره تعداد ضلع‌ها، زاویه‌ها، تساوی آنها و... توضیح دهید تا دوستان شما را پیدا کند که انتخاب کرده‌اید. سپس به توضیحات دوستان گوش کنید و شکلی را پیدا کنید که او انتخاب کرده است.

کار در کلاس

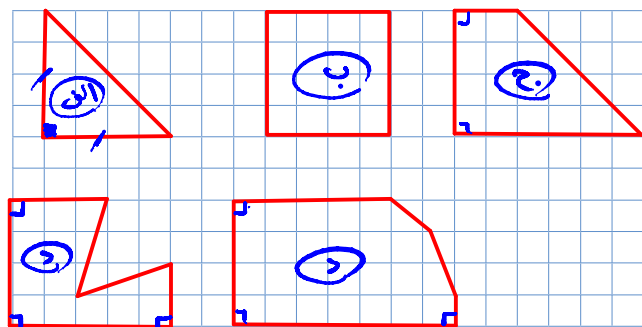


۱- هر یک از عبارت‌های زیر به کدام چندضلعی‌ها مربوط است؟

- لوزی با زاویه قائمه (د)
- پنج ضلعی غیر منظم (الف)
- مثلث با زاویه باز (ه)
- چندضلعی منظم (ز)



۲- چند ضلعی‌های زیر را در صفحه شطرنجی رسم کنید.



الف) یک مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین

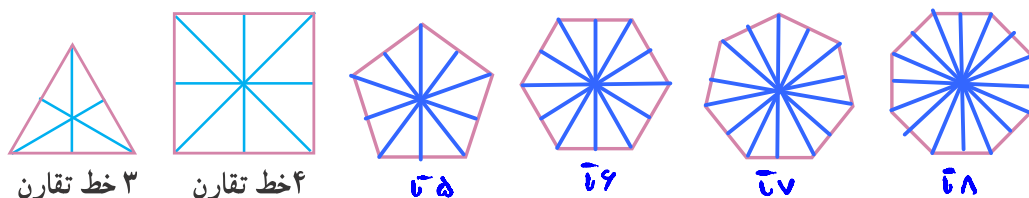
ب) مستطیلی با ضلع‌های مساوی

ج) یک دوزنقه قائم الزاویه

د) یک شش ضلعی با دقیقاً سه زاویه قائمه

۳- در سال گذشته با خط تقارن شکل آشنا شدید.

الف) تعداد خط‌های تقارن هریک از چند ضلعی‌های منتظم زیر را پیدا کنید.



ب) به نظر شما نه ضلعی منتظم چند محور تقارن دارد؟ ده ضلعی منتظم چگونه؟

* هر n ضلعی منتظم به اندازه تعداد اضلاعش خط تقارن دارد.

فعالیت

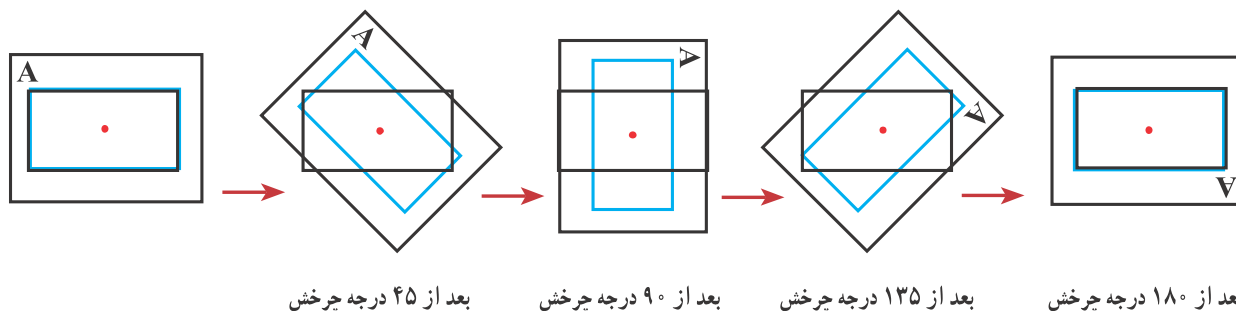


۱- یک ورق کاغذ پوستی روی مستطیل روبه‌رو قرار دهید

و تصویر مستطیل را روی آن رسم کنید.

نوک مدادتان را روی مرکز دوران بگذارید و مانند شکل‌های زیر،

کاغذ پوستی را ۱۸° درجه حول مرکز دوران بچرخانید.



بعد از 45° درجه چرخش

بعد از 90° درجه چرخش

بعد از 135° درجه چرخش

بعد از 180° درجه چرخش

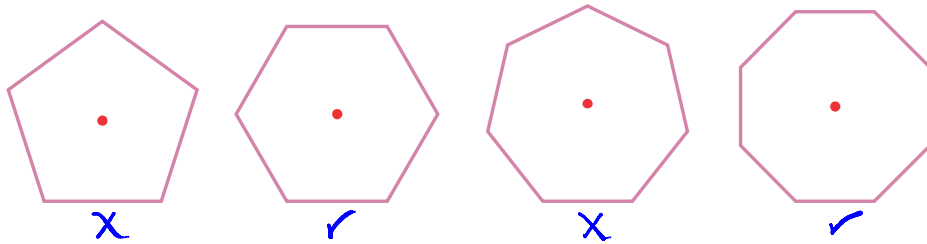
آیا تصویر، روی شکل منطبق می‌شود؟

اگر شکلی را حول یک نقطه، 180° درجه دوران دهیم و نتیجه دوران، روی خودش منطبق شود، می‌گوییم شکل **مرکز تقارن** دارد و نقطه مورد نظر، مرکز تقارن شکل است.



۲- شکل روبه‌رو مثلثی متساوی‌الاضلاع است. یک ورق کاغذ پوستی روی آن قرار دهید و مراحل فعالیت (۱) را تکرار کنید. آیا تصویر، روی شکل منطبق می‌شود؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ **مثلث متساوی‌الاضلاع مرکز تقارن ندارد**

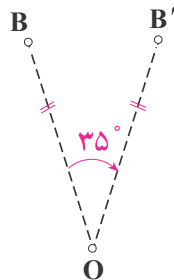
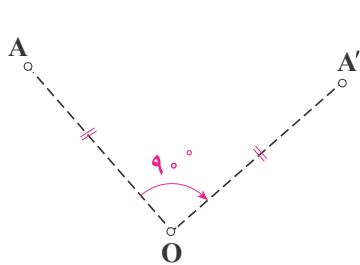
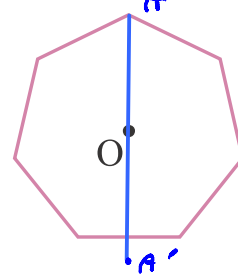
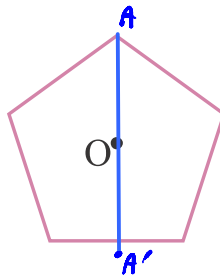
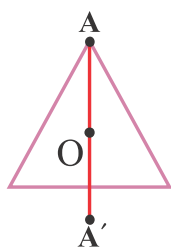
۳- در کدام یک از چندضلعی‌های منتظم زیر، نقطه مشخص شده مرکز تقارن است؟



به نظر شما نه ضلعی منتظم مرکز تقارن دارد؟ **خیر**

ده ضلعی منتظم چگونه؟ از این فعالیت چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ **هر n ضلعی منتظمی که تعداد اضلاع آن زوج باشد، مرکز تقارن دارد.**

۴- یکی از راه‌های تشخیص اینکه نقطه O در مثلث متساوی‌الاضلاع مرکز تقارن نیست، این است که می‌توان روی شکل، نقطه‌ای پیدا کرد که قرینه آن نسبت به نقطه O روی خود شکل قرار نگرفته باشد. مانند نمونه، نشان دهید که نقطه O در دو شکل دیگر هم، مرکز تقارن نیست.



۵- شکل‌های مقابل چگونگی پیدا کردن دوران یافته نقاط A و B حول مرکز O را به اندازه 90° و 35° در جهت عقربه‌های ساعت نشان می‌دهد.

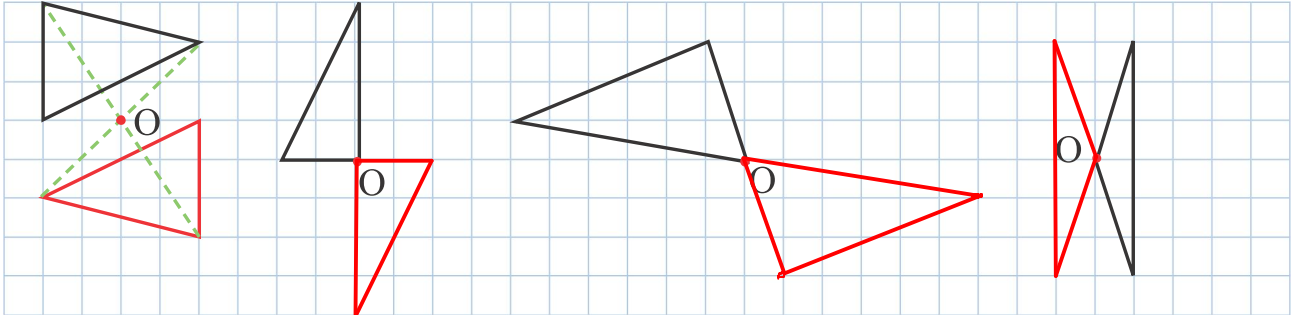
کدام یک از شکل‌های فعالیت (۳) با

دوران 90° حول نقطه مشخص شده در جهت عقربه‌های ساعت روی خودش می‌افتد؟ **۸ ضلعی منتظم**

کار در کلاس



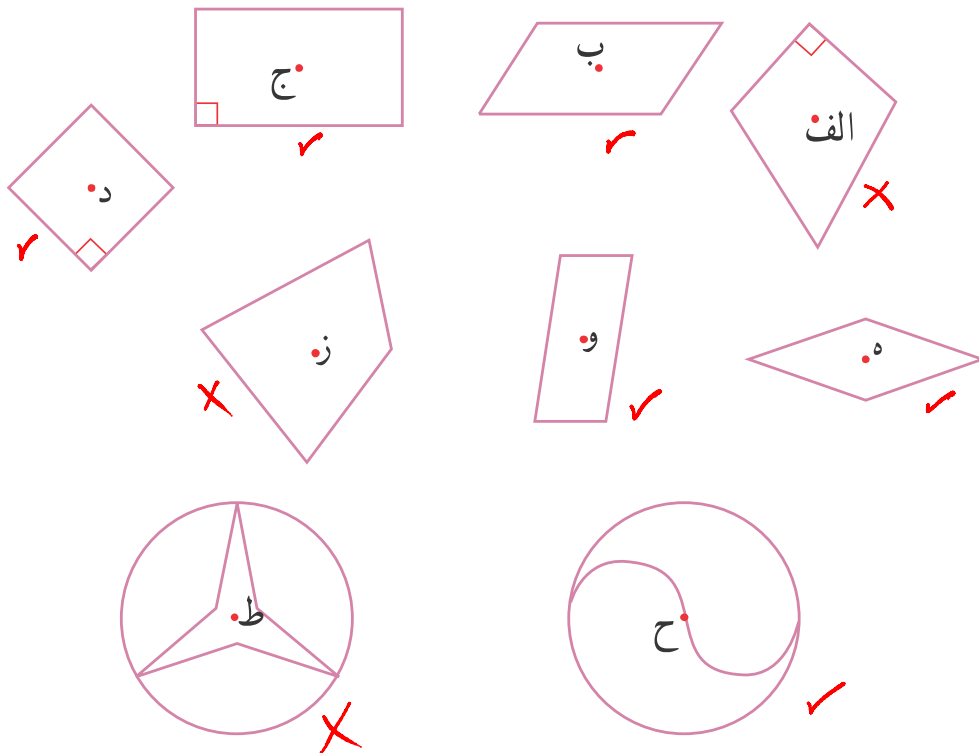
مانند نمونه هر شکل را طوری کامل کنید که نقطه O مرکز تقارن باشد.

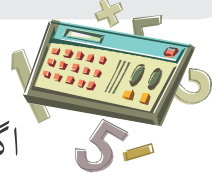


تمرین

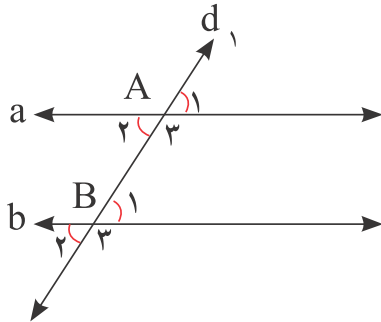


در هر شکل، بررسی کنید که نقطه مشخص شده، مرکز تقارن شکل هست یا نه.





اگر خطی مانند d_1 ، خطوط a و b را مانند شکل با زاویه‌های مساوی قطع کرده باشد، خط‌های a و b با هم موازیند.



به خط d_1 ، خط مورب می‌گویند.

موازی بودن خط‌های a و b را به صورت $a \parallel b$ نمایش می‌دهند. هر خطی که دو خط موازی را قطع کند با آنها زاویه‌های مساوی می‌سازد.

۱- اگر $\hat{A}_1 = 6^\circ$ باشد، زاویه‌های خواسته شده را پیدا کنید و راه حل خود را توضیح دهید.

چون مکمل زاویه A_1 است. $\hat{A}_3 = 12^\circ$

چون $a \parallel b$ ، خط d_1 مورب آن‌هاست. $\hat{B}_1 = 6^\circ$

چون با زاویه B_1 متقابل به رأس است. $\hat{B}_2 = 6^\circ$

چون مکمل زاویه B_2 است. $\hat{B}_3 = 12^\circ$

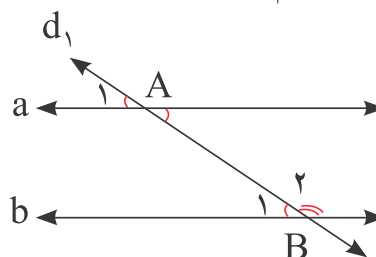
۲- خط d_2 را بر a عمود کنید و ادامه دهید تا خط b را قطع کند. چرا d_2 بر b هم عمود است؟

چون $a \parallel b$ و d_2 مورب آن‌هاست

۳- خط d_3 با خط b زاویه 7° ساخته است. خط d_3 با خط a چه زاویه‌ای می‌سازد؟ زاویه 7° (یا زاویه 11°)

۴- دو خط a و b با هم موازی‌اند و خط d_1 مورب است؛ پس زاویه‌های A_1 و B_1 با هم مساوی‌اند. این مطلب را به صورت زیر نشان می‌دهیم.

$$(a \parallel b \text{ و } d_1 \text{ مورب و } a \parallel b) \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_1$$



$$\left. \begin{array}{l} \hat{B}_1 + \hat{B}_2 = 180^\circ \\ \hat{A}_1 = \hat{B}_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{B}_2 = 180^\circ$$

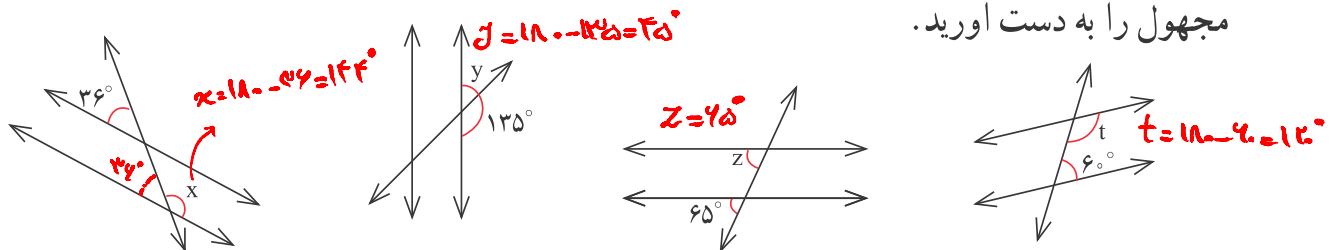
چرا A_1 و B_2 مکمل اند؟

اگر خط a را روی صفحه انتقال دهیم تا روی خط b قرار گیرد و نقطه A روی B بیفتد، زاویه A_1 روی کدام زاویه قرار می گیرد؟ **در زاویه B_2 ظاهر شود.**
چگونه از این طریق می توان توجیه کرد که زاویه A_1 و زاویه B_2 مکمل یکدیگرند؟ توضیح دهید.

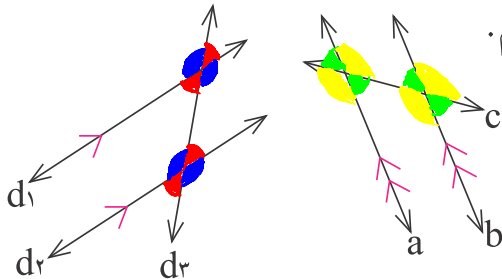
کار در کلاس



۱- در هر شکل یک خط مورب، دو خط موازی را قطع کرده است. اندازه زاویه های مجهول را به دست آورید.



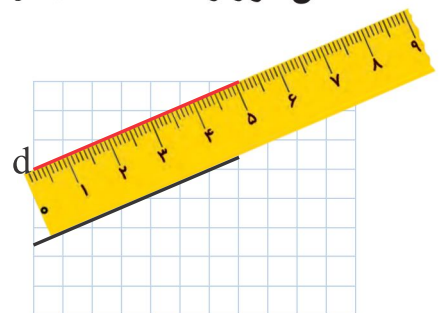
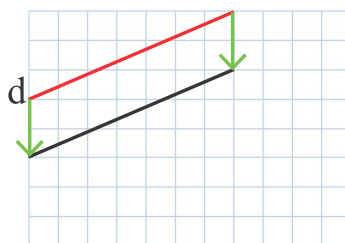
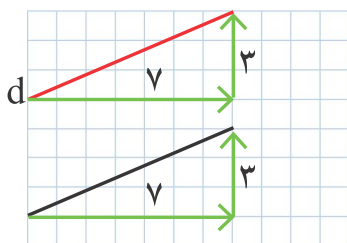
۲- موازی بودن دو خط را مانند شکل با علامت گذاری آنها مشخص می کنیم. عبارت «خط d_1 با خط d_2 موازی نیست» را به صورت $d_1 \not\parallel d_2$ می نویسیم.
الف) عبارت های $a \parallel b$ و $a \parallel c$ را بخوانید.
ب) زاویه های مساوی را در شکل ها با علامت گذاری مشخص کنید.



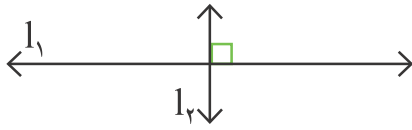
فعالیت



۱- می خواهیم در صفحه شطرنجی خطی موازی خط d رسم کنیم. راه حل سه دانش آموز را مشاهده کنید و توضیح دهید هر کدام از آنها چگونه خط موازی را رسم کرده است.



۲- عمود بودن دو خط را با علامت گذاری آنها مشخص می‌کنیم و عبارت «خط l_1 بر خط l_2 عمود است» را به صورت $l_1 \perp l_2$ می‌نویسیم.



الف

$$\left. \begin{array}{l} a \perp b \\ a \perp c \end{array} \right\} \Rightarrow b \parallel c$$

دو خط عمود بر یک خط باهم موازی‌اند

مانند نمونه برای هر کدام شکل بکشید و جاهای خالی را پر کنید.

ج

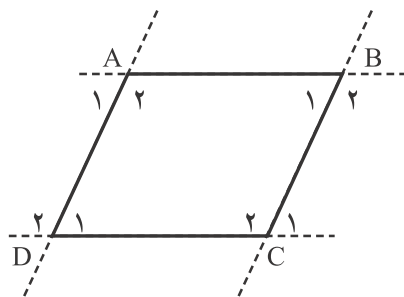
$$\left. \begin{array}{l} d \parallel e \\ d \parallel f \end{array} \right\} \Rightarrow e \parallel f$$

دو خط موازی با یک خط باهم موازی‌اند

ب

$$\left. \begin{array}{l} g \parallel h \\ k \perp h \end{array} \right\} \Rightarrow k \perp g$$

اگر خطی بر یکی از دو خط موازی عمود شود مربوط به دیگری عمود است



۳- در هر متوازی الاضلاع، ضلع‌های روبه‌رو باهم موازی‌اند. چهارضلعی ABCD یک متوازی الاضلاع است. (الف) ضلع‌های موازی را با علامت گذاری مشخص کنید. (ب) جاهای خالی را در رابطه‌های زیر کامل کنید.

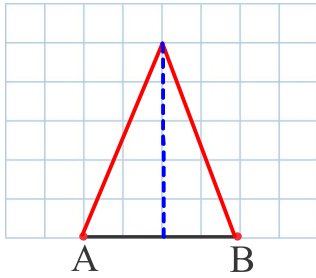
$$(AD \parallel BC \text{ و } AB \parallel DC) \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{D}_1, \hat{A}_2 = \hat{D}_2$$

$$(AB \parallel DC \text{ و } BC \text{ مورب}) \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{C}_1, \hat{B}_2 = \hat{C}_2$$

$$(AD \parallel BC \text{ و } DC \text{ مورب}) \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{C}_1, \hat{D}_2 = \hat{C}_2$$

$$(AD \parallel BC \text{ و } AB \text{ مورب}) \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_1, \hat{A}_2 = \hat{B}_2$$

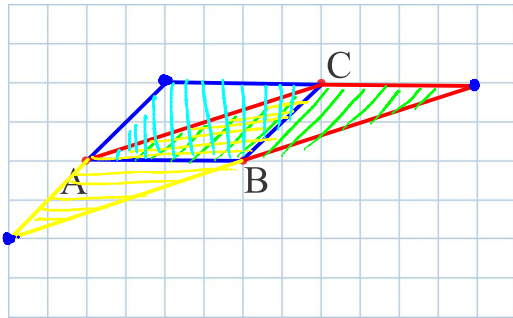
کار در کلاس



۱- الف) یک مثلث متساوی الساقین بکشید؛ طوری که پاره خط AB قاعده آن باشد. پاسخ خود را با پاسخ‌های دوستانتان مقایسه کنید.
ب) خط تقارن مثلث را رسم کنید.

ج) آیا دو زاویه مجاور قاعده با هم برابرند؟ بله

د) آیا خط تقارن، عمود منصف قاعده و نیمساز زاویه مقابل آن است؟ بله



۲- متوازی الاضلاعی رسم کنید که نقاط A، B و C سه تا از رأس‌های آن باشند.

پاسخ خود را با پاسخ‌های دوستانتان مقایسه کنید.

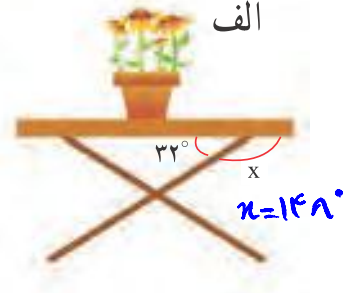
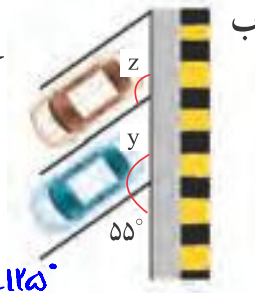
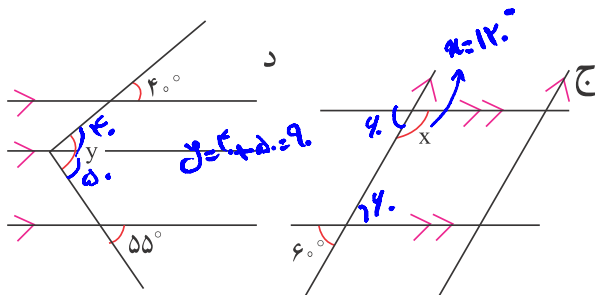
برای این سؤال چند پاسخ مختلف می‌توانید پیدا

کنید؟ این مسئله ۳ سطح دارد

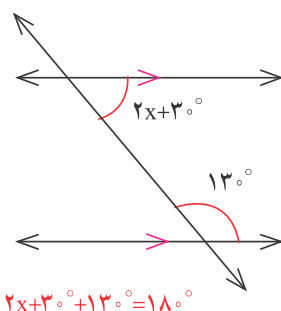
تمرین



۱- در هر قسمت، اندازه زاویه مجهول را پیدا کنید.



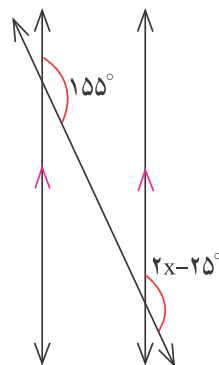
۲- مانند نمونه با تشکیل معادله، مقدار X را پیدا کنید.



$$2x + 30 + 130 = 180$$

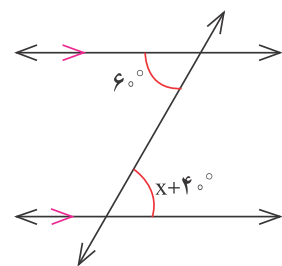
$$2x = 180 - 160 = 20$$

$$x = 10$$



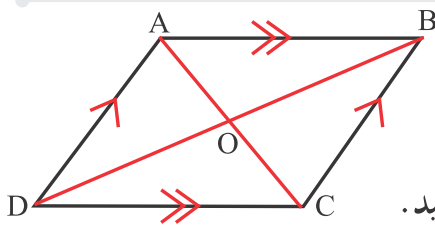
$$2x - 25 = 155$$

$$2x = 180 - 90 = 90$$



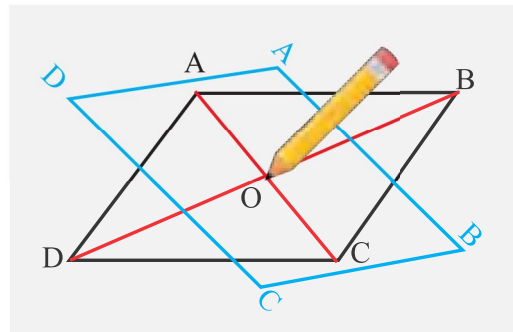
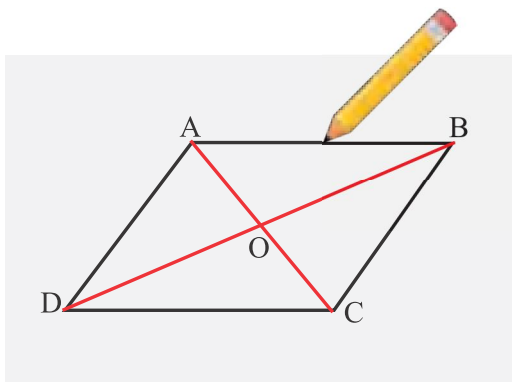
$$x + 40 = 60$$

$$x = 20$$



چهارضلعی ای که ضلع های روبه روی آن دو به دو با هم موازی اند، متوازی الاضلاع نام دارد.

- ۱- متوازی الاضلاعی را رسم، و مانند شکل نام گذاری کنید.
یک ورق کاغذ پوستی روی آن بگذارید و تصویر متوازی الاضلاع را رسم کنید.
نوک مدادتان را روی نقطه O (محل برخورد قطر ها و مرکز تقارن شکل) قرار دهید و مانند شکل های زیر، تصویر را 180° درجه حول این نقطه بچرخانید تا بر شکل منطبق شود.



- ۲- با توجه به انطباق شکل و تصویر، تساوی ها را کامل کنید.

$$\hat{A} = \hat{C} \quad \hat{B} = \hat{D} \quad \overline{AB} = \overline{DC} \quad \overline{BC} = \overline{AD}$$

هر یک از عبارت های زیر، یکی از خاصیت های متوازی الاضلاع را بیان می کند. با توجه به تساوی های بالا، این دو عبارت را کامل کنید.

در هر متوازی الاضلاع، زاویه های روبه رو بهم مساوی اند

در هر متوازی الاضلاع، ضلع های روبه رو بهم برابرند

در هر متوازی الاضلاع، زاویه های مجاور مکمل هستند.

۳- پاره خط OA بر کدام پاره خط منطبق شده است؟ OC

پاره خط OB چگونه؟ OD

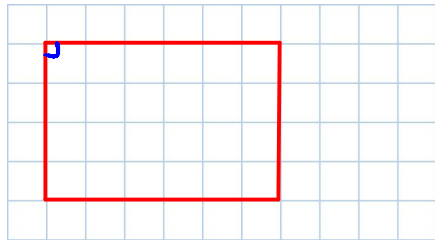
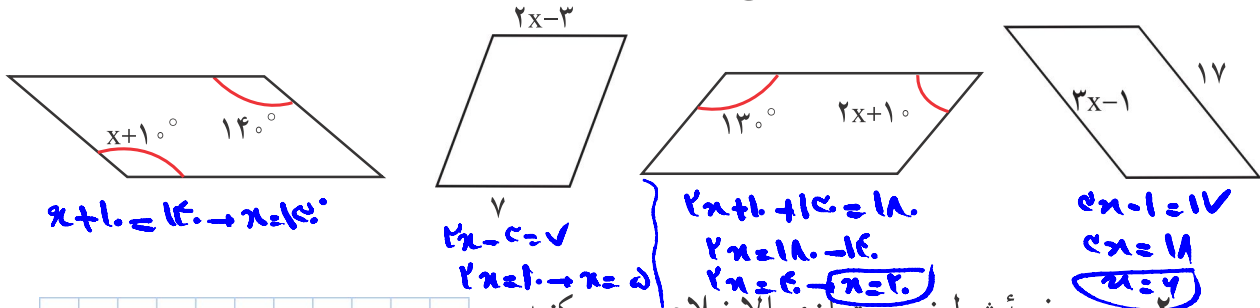
با توجه به پاسخ این دو پرسش، یک خاصیت دیگر متوازی الاضلاع را پیدا کنید و بنویسید.

در هر متوازی الاضلاع، قطر ها همدگر را نصف می کنند

کار در کلاس



۱- شکل های زیر متوازی الاضلاع اند. با تشکیل معادله، مقدار x را به دست آورید.



۲- در صفحه شطرنجی متوازی الاضلاعی رسم کنید که یکی از زاویه های قائمه (۹۰ درجه) باشد.

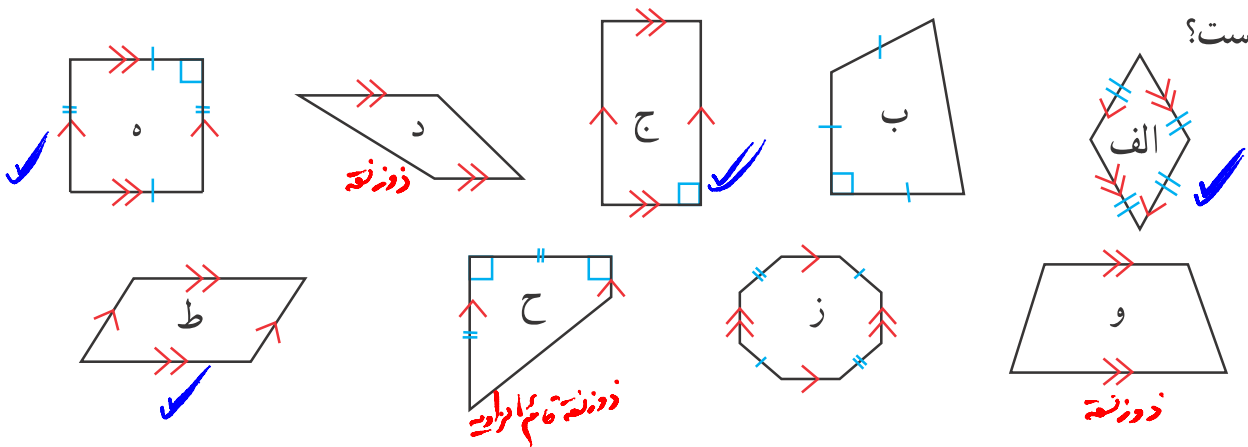
چرا زاویه های دیگر آن هم حتماً قائمه اند؟ توضیح دهید.
چون در متوازی الاضلاع زاویه های روبرو به هم برابرند و زاویه های مجاور مکمل هستند.

فعالیت



۱- با توجه به تعریف متوازی الاضلاع، کدام یک از شکل های زیر متوازی الاضلاع

است؟



۲- در اینجا چند چهارضلعی دیگر هم تعریف شده است. هر تعریف را بخوانید و از میان

چهارضلعی های فعالیت قبل، مثال هایی برای هریک پیدا کنید.

مستطیل متوازی الاضلاعی است که زاویه های قائمه دارد. (ج، ه)

لوزی متوازی الاضلاعی است که چهار ضلع آن برابرند. (الف، ه)

مربع متوازی الاضلاعی است که چهار ضلع مساوی و زاویه های قائمه دارد. (ه)

۳- می دانیم که «در هر متوازی الاضلاع، قطرها یکدیگر را نصف می کنند».

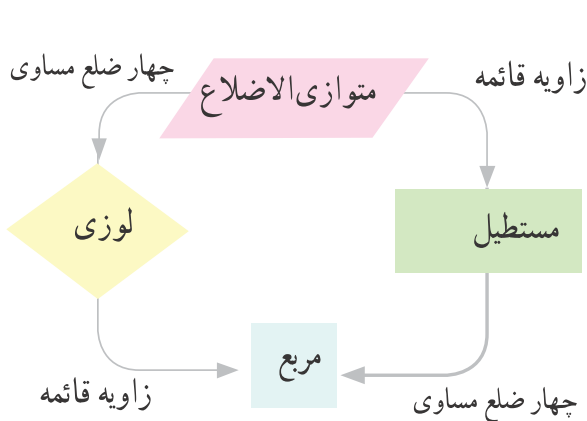
آیا می توانیم نتیجه بگیریم که «در هر لوزی هم قطرها یکدیگر را نصف می کنند»؟ چرا؟

ب- زیرا لوزی نوعی متوازی الاضلاع است

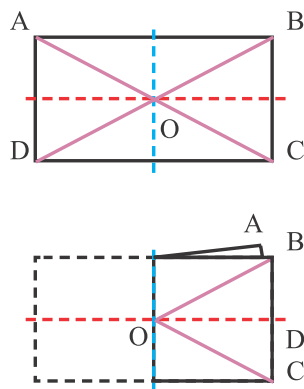
کار در کلاس



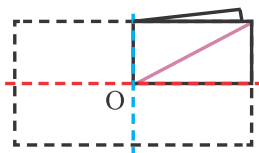
۱- با توجه به نمودار رو به رو در جدول زیر، جاهای خالی را پر کنید.



| متوازی الاضلاع | لوزی | مستطیل | مربع | |
|----------------|------|--------|------|--|
| ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | |
| ✓ | ✗ | ✓ | ✗ | |
| ✓ | ✓ | ✗ | ✗ | |
| ✓ | — | — | — | |



۲- روی یک ورق کاغذ، مستطیلی به دلخواه رسم کنید و دور آن را ببرید. مستطیل را مانند شکل نام گذاری کنید؛ سپس آن را ابتدا روی یکی از خط‌های تقارن و سپس روی خط تقارن دیگر تا کنید.



مانند نمونه، توضیح دهید که شکل به دست آمده چگونه هر یک از خاصیت‌های مستطیل را نشان

می‌دهد.

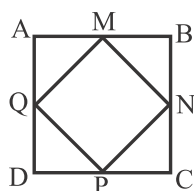
● در مستطیل قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند؛ چون OA روی OC و OB روی OD قرار گرفته

است.

الف) همه زاویه‌ها در مستطیل با هم برابرند؛ چون **چهار زاویه برهم منطبق می‌شوند**

ب) ضلع‌های روبه‌رو در مستطیل مساوی‌اند؛ چون **AB به DC و AD به BC برهم منطبق می‌شوند**

ج) قطرها در مستطیل با هم برابرند؛ چون **OA و OC و OB و OD برهم منطبق می‌شوند**



۳- در یک طرح کاشی کاری، مربع ABCD دیده می شود. چهارضلعی MNPQ هم با وصل شدن وسط ضلع های این مربع تشکیل شده است.

دو دانش آموز توضیح داده اند که MNPQ چه نوع چهارضلعی ای است. نظر این دو دانش آموز در اینجا آمده است.

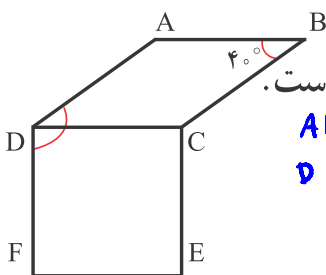
هادی

ABCD مربع است. این مربع را روی دو قطر آن، که محور تقارن نیز هستند، تا می کنیم. همه زاویه های چهارضلعی MNPQ روی هم می افتند؛ پس با هم برابرند. چون مجموع آنها 360° است؛ پس هر کدام 90° می شوند. در نتیجه این چهارضلعی مستطیل است.

مبین

ABCD مربع است. این مربع را روی دو خط تقارنی، که موازی ضلع های آن هستند، تا می کنیم. همه ضلع های چهارضلعی MNPQ روی هم می افتند. پس، این چهارضلعی لوزی است.

دلایل هر دو را بخوانید و توضیح دهید که چگونه به کمک این دو نوشته می توانیم نتیجه بگیریم که MNPQ مربع است. **بسیار ثابت کردیم که ضلع MNPQ با هم برابرند و هر یک از زوایای MNPQ با هم برابرند**



تمرین ۱- چهارضلعی ABCD لوزی و چهارضلعی DCEF مربع است. $AB \parallel DC$ و $DC \parallel FE$ چرا $AB \parallel EF$ ؟ (الف) چرا $AD = CE$ ؟ (ب) $90^\circ + 40^\circ = 130^\circ$ زاویه ADF چند درجه است؟ (ج)



$$\left. \begin{array}{l} AD = DC \\ DC = CE \end{array} \right\} \Rightarrow AD = CE$$

۲- روی کاغذ، لوزی دلخواهی بکشید و دور آن را ببرید.

این لوزی کاغذی را روی دو خط تقارنش تا کنید. به کمک شکل به دست آمده چه نتایجی در مورد قطرهای لوزی به دست می آید. **قطرهای لوزی عمود منصف یکدیگرند و همچنین ضلعها را دو برابر می کنند**

۳- وسط ضلع های یک مستطیل را به ترتیب به هم وصل می کنیم. چهارضلعی به دست آمده



چه نوع چهارضلعی ای است؟ دلیل خود را توضیح دهید. **لوزی**

۴- درستی یا نادرستی هریک از جمله های زیر را بررسی کنید.

(ب) قطرهای هر لوزی با هم مساوی اند **×**

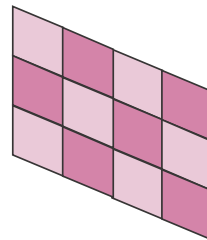
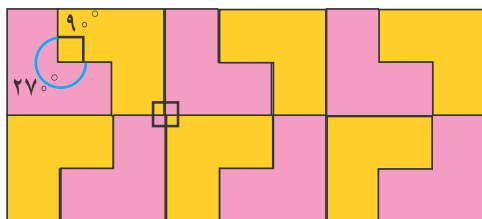
(الف) قطرهای هر مستطیل با هم مساوی اند **✓**

(د) قطرهای هر لوزی بر هم عمودند **✓**

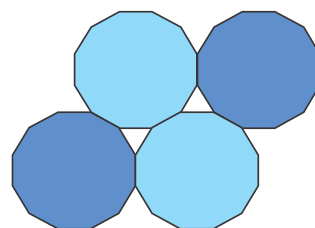
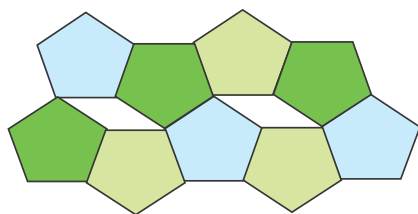
(ج) قطرهای هر مستطیل بر هم عمودند **×**



۱- در کاشی کاری، کاشی‌ها را طوری کنار هم قرار می‌دهند که روی هم نیفتند و جای خالی هم بین آنها نباشد. در اینجا چند نمونه کاشی کاری را مشاهده می‌کنید که هر کدام تنها با یک نوع کاشی انجام شده است.

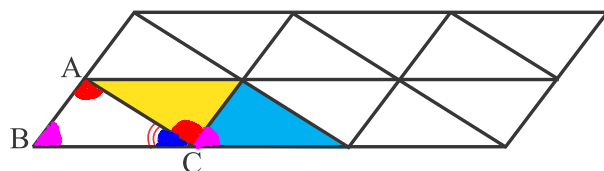


حالا به شکل‌های زیر توجه کنید. در هر مورد توضیح دهید، چرا کاشی کاری با یک نوع کاشی



انجام نمی‌شود؟
چون در بین کاشی‌ها
فضای خالی ایجاد می‌شود

۲- سطح زیر با مثلث‌هایی هم نهشت با مثلث ABC کاشی کاری شده است.



مثلث آبی انتقال یافته مثلث ABC است،

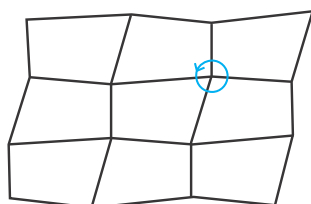
مثلث زرد دوران یافته مثلث ABC است.

زاویه‌های متناظر با هریک از زاویه‌های مثلث ABC را در این دو مثلث مشخص کنید.

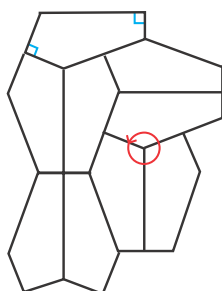
در کاشی کاری بالا، قسمتی را که نشان می‌دهد $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ پیدا کنید.



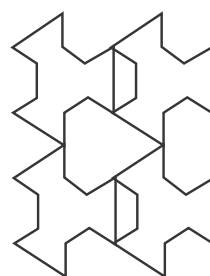
در کدام شکل، کاشی کاری با یک نوع کاشی انجام نشده است؟



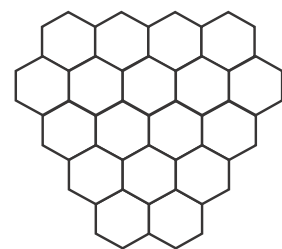
الف



ب



ج ✓



د

فعالیت



زاویه‌هایی که درون یک چندضلعی قرار دارند، **زاویه‌های داخلی** آن چندضلعی نامیده می‌شوند. مجموع زاویه‌های داخلی یک مثلث 180° درجه است.

| تعداد ضلع‌ها | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ |
|-----------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| شکل | | | | |
| تعداد مثلث‌ها | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| مجموع زاویه‌های داخلی | $1 \times 180^\circ = 180^\circ$ | $2 \times 180^\circ = 360^\circ$ | $3 \times 180^\circ = 540^\circ$ | $4 \times 180^\circ = 720^\circ$ |

جدول بالا نشان می‌دهد که مجموع زاویه‌های داخلی یک چهارضلعی با مجموع زاویه‌های داخلی دو تا مثلث برابر است؛ پس **مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی 360° می‌شود.**

الف) با کامل کردن جدول، مجموع زاویه‌های داخلی چندضلعی‌های دیگر را به دست آورید.

ب) فکر می‌کنید مجموع زاویه‌های داخلی یک هفت ضلعی چند درجه است؟ $5 \times 180 = 900$

یک هشت ضلعی چطور؟ چرا؟ $4 \times 180 = 1080$

ج) عبارت جبری زیر را طوری کامل کنید که نشان‌دهنده مجموع زاویه‌های داخلی یک n ضلعی باشد.

$$\text{مجموع زاویه‌های داخلی یک } n \text{ ضلعی} = (n - 2) \times 180^\circ$$

اکنون با کامل کردن جدول زیر اندازه هر یک از زاویه‌های داخلی چندضلعی‌های منتظم را پیدا کنید.

| تعداد ضلع‌ها | مجموع زاویه‌های داخلی | اندازه هر زاویه |
|--------------|-----------------------|-----------------------------------|
| ۳ | 180° | $\frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$ |
| ۴ | 360° | $\frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$ |
| ۵ | 540° | $\frac{540^\circ}{5} = 108^\circ$ |
| ۶ | 720° | $\frac{720^\circ}{6} = 120^\circ$ |

یک عبارت جبری بنویسید که نشان‌دهنده اندازه هر یک از زاویه‌های یک n ضلعی منتظم باشد.

$$\frac{(n-2) \times 180^\circ}{n}$$

کار در کلاس



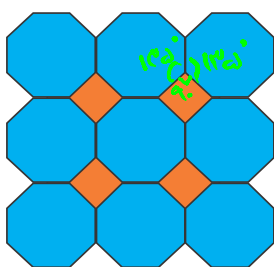
۱- مجموع زاویه‌های هریک از چندضلعی‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) هفت ضلعی منتظم $(7-2) \times 180 = 900^\circ$ ب) دوازده ضلعی منتظم $(12-2) \times 180 = 1800^\circ$

۲- به کمک جواب قسمت (ب) سؤال قبل، اندازه‌ی هریک از زاویه‌های دوازده ضلعی منتظم

$$\frac{1800}{12} = 150^\circ$$

را حساب کنید.

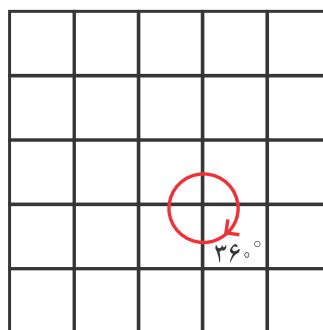
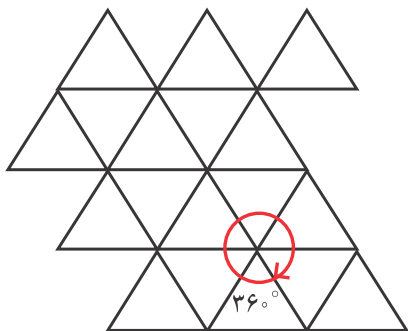


۳- سطح روبه‌رو با دو نوع کاشی منتظم، کاشی کاری شده است.

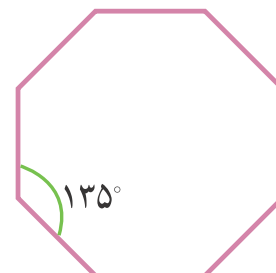
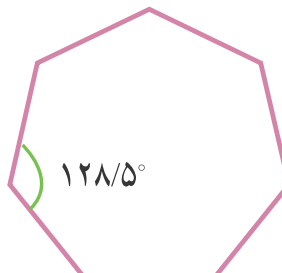
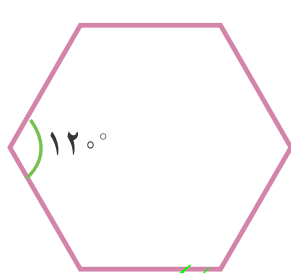
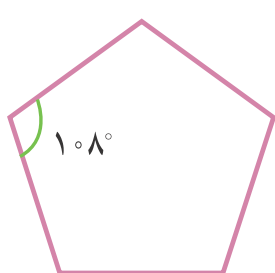
اندازه‌ی زاویه‌های هر دو نوع کاشی را محاسبه کنید. $\frac{(8-2) \times 180}{8} = 135^\circ$

۴- کاشی‌هایی به شکل چندضلعی‌های منتظم داریم و می‌خواهیم سطحی را فقط با یک نوع از

آنها کاشی کاری کنیم. شکل‌های زیر نشان می‌دهند که با سه ضلعی و چهارضلعی منتظم (یعنی مثلث متساوی الاضلاع و مربع) می‌توان کاشی کاری کرد.



یک نوع کاشی منتظم دیگر پیدا کنید که با آن بتوان کاشی کاری کرد.



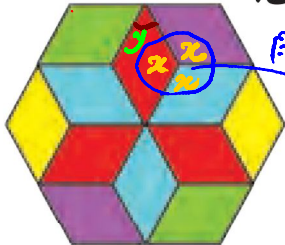
تمرین



۱- اندازه هر یک از زاویه های یک بیست ضلعی منتظم را پیدا کنید.

$$\frac{(20-2) \times 180}{20} = 144^\circ$$

۲- در کاشی کاری روبه رو تنها یک نوع کاشی به کار رفته است.



الف) این کاشی چه نوع چهارضلعی ای است؟ متوازی الاضلاع (ی توأم نبود)

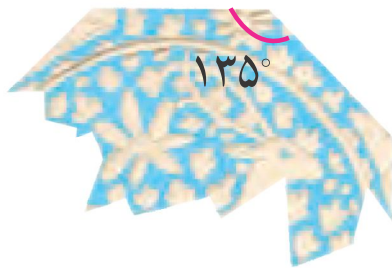
ب) اندازه هر یک از زاویه های آن چقدر است؟

$$4x = 360 \rightarrow x = 90^\circ$$

$$x + y = 180 \rightarrow y = 180 - 90 = 90$$

$$\begin{matrix} 120^\circ & 120^\circ \\ 120^\circ & 120^\circ \end{matrix}$$

۳- شکل روبه رو قسمتی از یک بشقاب قدیمی به شکل



چند ضلعی منتظم است.

حدس می زنید این بشقاب چندضلعی بوده است؟ چرا؟

$$\frac{(n-2) \times 180}{n} = 135^\circ \Rightarrow (n-2) \times 180 = 135n$$

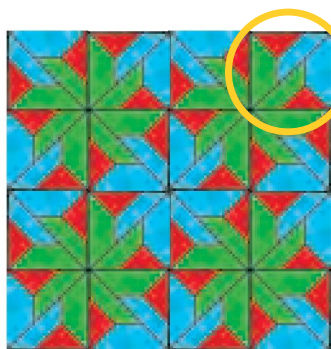
$$180n - 360 = 135n$$

$$180n - 135n = 360 \rightarrow 45n = 360 \rightarrow n = 8$$

۴- به کاشی کاری زیر توجه کنید. این کاشی با سه نوع کاشی مختلف انجام شده است.

شکل سمت راست، قسمتی از این طرح را به صورت بزرگ تر نمایش داده است.

زاویه های مشخص شده را به دست آورید.



در مربع قلم، نسبت زاویه های داخلی است

$$x = 45^\circ$$



شکل سمت راست مربع است

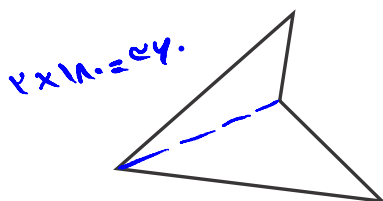
و کاشی ها متساوی الساقین هستند.

زاویه متساوی الساقین

$$y = 90^\circ$$

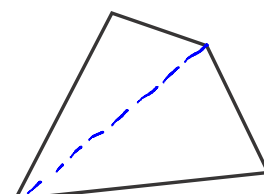


۵- مجموع زاویه های داخلی هر شکل را به دست آورید و با هم مقایسه کنید.



$$2 \times 180 = 360$$

(ب)

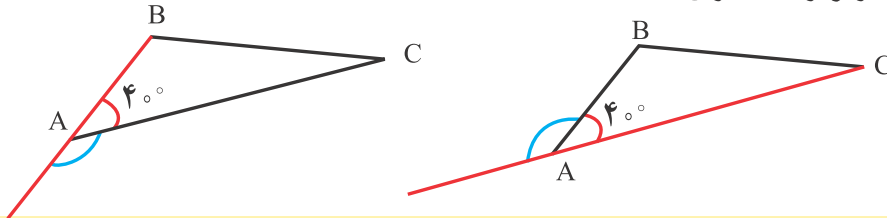


$$2 \times 180 = 360$$

(الف)



در شکل سمت چپ، زاویه خارجی رأس A از مثلث ABC از امتداد یافتن ضلع AB تشکیل شده است. در شکل سمت راست، زاویه خارجی رأس A از امتداد یافتن ضلع AC تشکیل شده است. چرا این دو زاویه مساوی‌اند؟

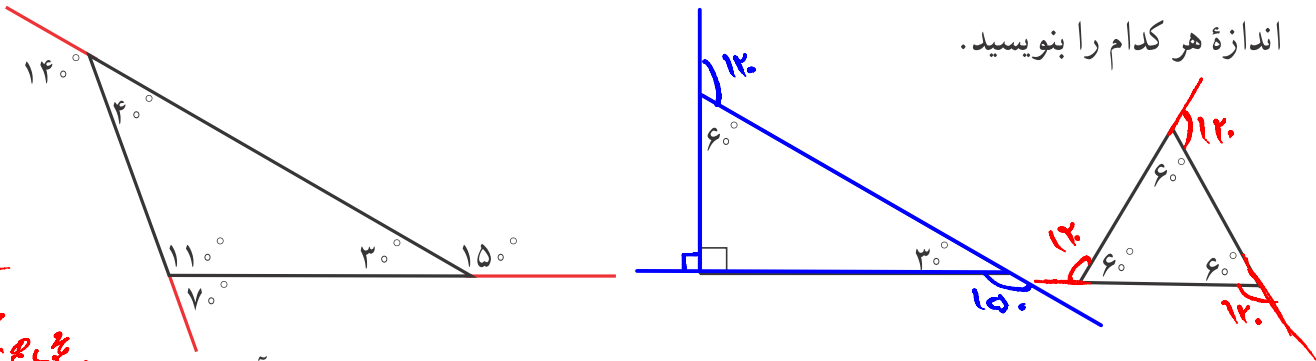


زاویه‌ای که در هر رأس یک چند ضلعی محدب، بین یک ضلع و امتداد ضلع دیگر تشکیل می‌شود، **زاویه خارجی** آن رأس نامیده می‌شود.

کار در کلاس

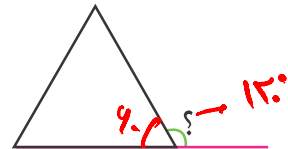
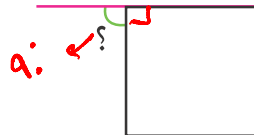
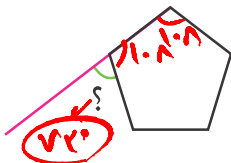


۱- الف) مانند نمونه در هر یک از مثلث‌های زیر، زاویه خارجی هر سه رأس را رسم کنید و اندازه هر کدام را بنویسید.

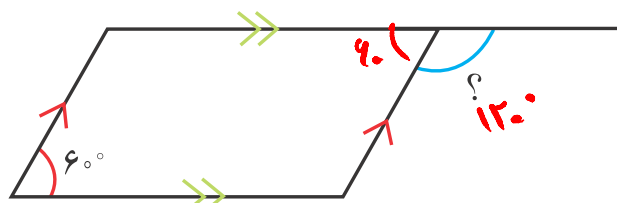
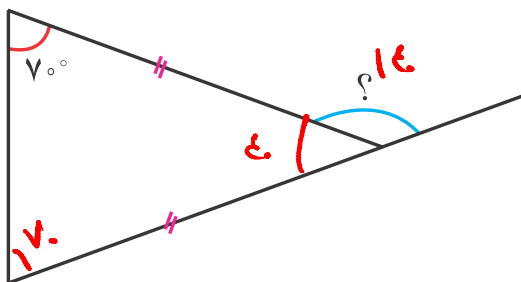


ب) مجموع زاویه‌های خارجی هر یک از مثلث‌ها را پیدا کنید. چه رابطه‌ای میان آنها دیده می‌شود؟
۲- چند ضلعی‌های زیر منتظم‌اند. اندازه زاویه‌های خواسته شده را پیدا کنید.

$$(5-3) \times 180 = 360$$



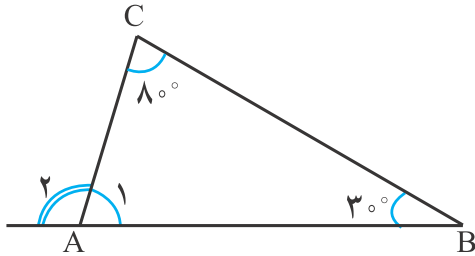
۳- با توجه به شکل، اندازه زاویه خواسته شده را پیدا کنید.



فعالیت

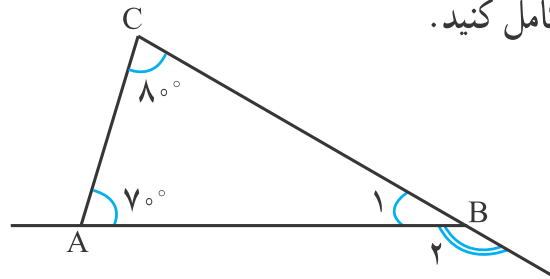


هدی برای یافتن زاویه خارجی یکی از رأس‌های مثلث به ترتیب زیر عمل کرد. راه حل او را کامل کنید.



$$\hat{A}_1 = 180^\circ - (3^\circ + 8^\circ) = 180^\circ - 11^\circ = 7^\circ$$

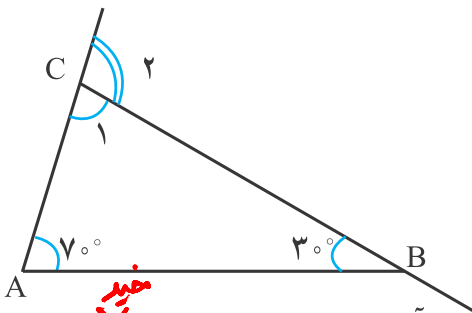
$$\hat{A}_2 = 180^\circ - 7^\circ = 11^\circ$$



$$\hat{B}_1 = 180^\circ - (8^\circ + 7^\circ) = 180^\circ - 15^\circ = 3^\circ$$

$$\hat{B}_2 = 180^\circ - 3^\circ = 15^\circ$$

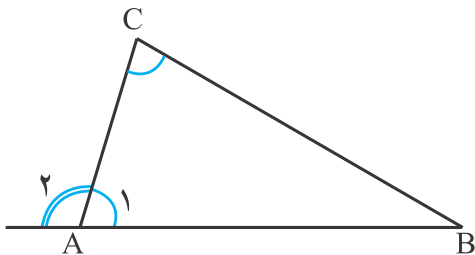
او رابطه جالبی را مشاهده کرد. آیا می‌توانید حدس بزنید چه رابطه‌ای؟
هدی با خودش فکر کرد: «آیا هر زاویه خارجی مثلث برابر با مجموع دو زاویه داخلی دیگر آن مثلث است؟» با یک مثال دیگر حدس خود را بررسی کرد.



$$\hat{C}_1 = 180^\circ - (7^\circ + 3^\circ) = 180^\circ - 10^\circ = 8^\circ$$

$$\hat{C}_2 = 180^\circ - 8^\circ = 10^\circ$$

این آزمایش نیز حدس او را تأیید کرد. آیا حدس زدن و آزمایش کردن کافی است؟ چرا؟ چون ما نمی‌توانیم تمام مثلث‌ها را یک به یک بررسی کنیم. پس به این فکر می‌کنیم که آیا می‌توانیم این قانون را برای همه مثلث‌ها ثابت کنیم؟ یکی از دوستان هدی راه حل او را به صورت کلی و بدون در نظر گرفتن مثال نوشت تا به این ترتیب، درستی حدس او را اثبات کند.



$$\left. \begin{array}{l} \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 180^\circ \\ \hat{A}_1 + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{B} + \hat{C}$$

بنابراین در هر مثلث، اندازه هر زاویه خارجی برابر با مجموع دو زاویه داخلی غیرمجاور آن است.

کار در کلاس



۱- مثالی بیاورید که نشان دهد جمله زیر، نادرست است.

«هر زاویه خارجی یک چهارضلعی، برابر مجموع سه زاویه داخلی دیگر آن است.»



۲- اندازه دو زاویه یک مثلث را می‌دانیم؛ پس می‌توانیم اندازه زاویه سوم آن را پیدا کنیم.
(چگونه؟) **خبر کنوا اندازه دو زاویه مثلث را؛ بقیه پس زاویه سوم را بخور: $180 - (n+y)$**

برای اینکه بتوانیم اندازه همه زاویه‌های هر یک از شکل‌های زیر را پیدا کنیم، دست کم چندتا از آنها باید معلوم باشند؟ **الف) لوزی** **ب) چهار ضلعی با ضلع‌های نامساوی**

مقدار کمتر است

**مقدار کمتری را داریم
کافه است**

فعالیت



سطر اول جدول زیر، نشان می‌دهد که مجموع زاویه‌های خارجی یک مثلث برابر 360° است.

| تعداد ضلع‌ها | شکل | مجموع زاویه‌های داخلی | مجموع زاویه‌های داخلی و خارجی | مجموع زاویه‌های خارجی |
|--------------|-----|--------------------------|-------------------------------|--------------------------------------|
| ۳ | | $1 \times 180^\circ$ | $3 \times 180^\circ$ | $(3-1) \times 180^\circ = 360^\circ$ |
| ۴ | | $2 \times 180^\circ$ | $4 \times 180^\circ$ | $(4-2) \times 180^\circ = 360^\circ$ |
| ۵ | | $3 \times 180^\circ$ | $5 \times 180^\circ$ | $(5-3) \times 180^\circ = 360^\circ$ |
| ۶ | | $4 \times 180^\circ$ | $6 \times 180^\circ$ | $(6-4) \times 180^\circ = 360^\circ$ |
| n | | $(n-2) \times 180^\circ$ | $n \times 180^\circ$ | $2 \times 180^\circ = 360^\circ$ |

$$n - (n-2) = n - n + 2 = 2$$

الف) جدول را کامل کنید و مجموع زاویه‌های خارجی شکل‌های بعدی را به دست آورید.

ب) فکر می‌کنید مجموع زاویه‌های خارجی یک هفت ضلعی چند درجه است؟ **360°**

یک هشت ضلعی چطور؟ **360°**

کار در کلاس



۱- مجموع زاویه‌های خارجی چندضلعی‌های زیر را حساب کنید.

الف) هشت ضلعی 340° (ب) ده ضلعی منتظم 340°

۲- به کمک پاسخ قسمت (ب) سؤال قبل،

الف) اندازه هر زاویه خارجی یک ده ضلعی منتظم را پیدا کنید.

$$\frac{340}{10} = 34^\circ$$

ب) اندازه هر زاویه داخلی یک ده ضلعی منتظم را پیدا کنید. $180 - 34 = 146^\circ$

تمرین



۱- زاویه‌های خارجی یک متوازی الاضلاع

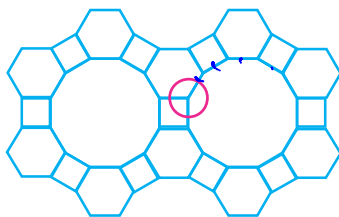
در شکل نشان داده شده‌اند.

زاویه‌های مساوی را با علامت گذاری مشخص کنید.

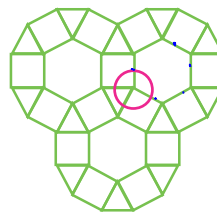
۲- هر یک از طرح‌های زیر با استفاده از سه نوع کاشی منتظم طراحی شده است. با محاسبه

زاویه‌های داخلی هر کاشی منتظم، نشان دهید زاویه مشخص شده در هر شکل 360° درجه است.

| | |
|---------------|-------------|
| ۱۲ ضلعی منتظم | 150° |
| ۳ ضلعی منتظم | 90° |
| ۶ ضلعی منتظم | 120° |



$$150 + 90 + 120 = 360$$



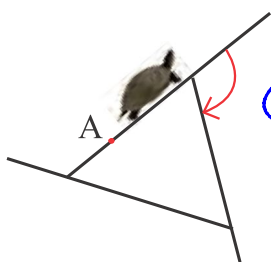
| | |
|--------------|-------------|
| ۶ ضلعی منتظم | 120° |
| ۳ ضلعی منتظم | 90° |
| ۴ ضلعی منتظم | 90° |

$$120 + 90 + 90 + 90 = 360$$

۳- لاک پشتی روی لبه باغچه‌ای حرکت می‌کند. او در هر گوشه می‌چرخد و روی لبه بعدی

قرار می‌گیرد.

زاویه خارجی



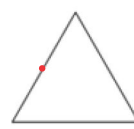
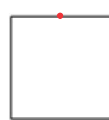
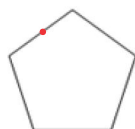
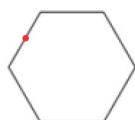
الف) این لاک پشت در هر گوشه به اندازه زاویه داخلی می‌چرخد یا زاویه خارجی؟

ب) او حرکتش را از نقطه A شروع کرده است.

تا وقتی دوباره به A برگردد، روی هم چند درجه می‌چرخد؟ 340°

ج) این لاک پشت برای پیمودن محیط هر یک از باغچه‌های منتظم زیر با شروع از نقطه مشخص شده چند

درجه می‌چرخد؟ 340°



د) در پاسخ قسمت قبل، چه الگویی را مشاهده می‌کنید؟ توضیح دهید. مجموع زاویه‌های خارجی تمام چندضلعی‌ها

مجموع 340°

●●●●●●●● مرور فصل ۳ ●●●●●●●●

مفاهیم و مهارت‌ها

در این فصل اصطلاحات زیر به کار رفته‌اند. مطمئن شوید که می‌توانید با جمله‌های خود، آنها را توصیف کنید و برای هر کدام مثالی بزنید.

- چندضلعی محدّب
- چندضلعی مقعر
- مرکز تقارن
- چندضلعی منتظم
- زاویه داخلی
- زاویه خارجی

در این فصل، روش‌های اصلی زیر مطرح شده‌اند. هر کدام را با یک مثال توضیح دهید و در دفتر خود خلاصه درس را بنویسید.

- بررسی مرکز تقارن یک شکل
- پیدا کردن زاویه‌های مساوی و مکمل در خط‌های موازی و مورب
- تعریف متوازی الاضلاع
- تعریف مستطیل
- تعریف لوزی
- تعریف مربع
- رابطه چهارضلعی‌ها
- خاصیت‌های چهارضلعی‌ها
- پیدا کردن مجموع زاویه‌های داخلی یک چندضلعی
- پیدا کردن زاویه داخلی یک چندضلعی منتظم
- پیدا کردن مجموع زاویه‌های خارجی یک چندضلعی
- پیدا کردن زاویه خارجی یک رأس مثلث

کاربرد

این درس به شما در درک بهتر شکل‌های هندسی و رابطه بین آنها کمک می‌کند. ما در انواع صنایع دستی و آثار معماری کشور خود شکل‌های مختلف هندسی را می‌توانیم ببینیم.

تمرین‌های ترکیبی

۱- هر خانه جدول زیر را با علامت × یا ✓ کامل کنید.

| ضلع‌های روبه‌رو برابر | ضلع‌های روبه‌رو موازی | زاویه‌های روبه‌رو برابر | قطرها منصف | قطرها برابر | |
|-----------------------|-----------------------|-------------------------|------------|-------------|----------------|
| ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | × | متوازی الاضلاع |
| ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | مستطیل |
| ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | × | لوزی |
| ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | مربع |

۲- اندازه زاویه‌های داخلی و خارجی یک هشت ضلعی منتظم را پیدا کنید.

۱۴۵° ۴۵°